

Избранные сюжеты из теории динамических систем

Ю. Ильяшенко, А. Ускова

Эти лекции были прочтены Ю. Ильяшенко на 26й летней школе семинара “Динамические системы” в Ратмино 23.06 – 02.07.2025. Они были записаны и набраны А. Усковой; все многочисленные рисунки также приготовлены ею.

Лекция 1. Ретроспектива: XVI проблема Гильберта

1.1 Стратегия Петровского–Ландиса

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = P_2(x)$, где P_2 - векторный многочлен степени 2 ($x \in \mathbb{R}^2$).

Как оценить сверху количество предельных циклов?

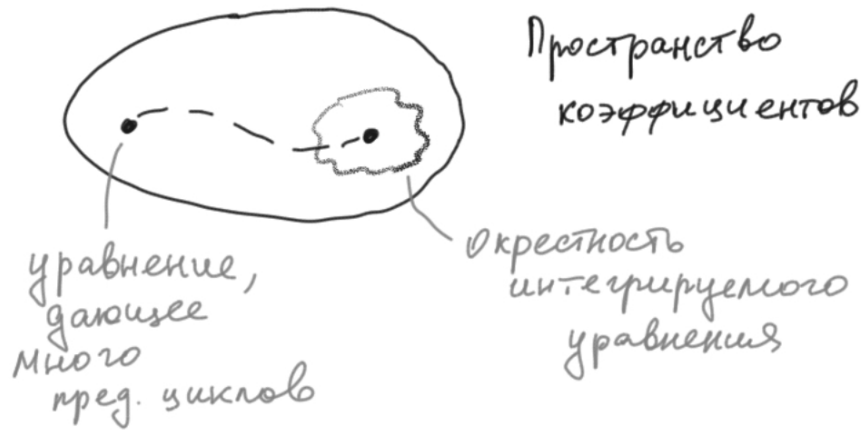
- Идея: шевелить параметры и следить за циклами.
- Проблема: циклы могут сливаться и исчезать.
- Идея Петровского: определить комплексный предельный цикл и шевелить уже комплексную картинку.
- Проблема: есть “плохие” наборы коэффициентов, например, при которых комплексный предельный цикл садится на сепаратрису.
- Идея Петровского: таких наборов “немного” (их комплексная коразмерность равна 1), так что их можно обойти.

Стратегия Петровского-Ландиса (коротко):

- ищем уравнение с большим количеством предельных циклов;
- строим путь в пространстве коэффициентов от него к окрестности интегрируемого уравнения (у которого предельных циклов нет совсем, но в окрестности которого число циклов можно оценить сверху);
- проблема: при проходе по пути теряем много предельных циклов.

1.2 Комплексный предельный цикл

Рассмотрим уравнение $\dot{z} = P_2(z)$, где P_2 - векторный многочлен степени 2 ($z \in \mathbb{C}^2$).



Его решение - такая функция $\varphi(t) : D \rightarrow \mathbb{C}^2$, что $\dot{\varphi}(t) \equiv P_2(\varphi(t))$.

Определим $\Sigma := \{a | P_2(a) = 0\}$. $\mathbb{C}^2 \setminus \Sigma$ разбито решениями уравнения $\dot{z} = P_2(z)$ на римановы поверхности. Это слоение: окрестность каждой неособой точки биголоморфно эквивалентна произведению дисков [это комплексная теорема о выпрямлении].

На наивном уровне комплексный цикл - это нестягиваемая вещественная петля на римановой поверхности.

Комплексное отображение первого возвращения (отображение Пуанкаре) у гомотопных петель с одной и той же базисной точкой совпадает. Отображения Пуанкаре для двух свободно гомотопных петель с разными базисными точками аналитически сопряжены. Поэтому уместно называть **комплексным циклом** класс свободной гомотопии петель на фазовой кривой.

Комплексный предельный цикл соответствует изолированной неподвижной точке отображения Пуанкаре.

1.3 Подготовительная теорема Вейерштрасса и теорема о сохранении цикла

Теорема 1. Пусть $f(z, \varepsilon)$ - голоморфная функция, пусть $f(z, 0)$ имеет n -кратный ноль по z .

Тогда вся функция равняется многочлену Вейерштрасса, умноженному на "поправку":

$$f(z, \varepsilon) = P_\varepsilon(z) \cdot H(z, \varepsilon), \text{ где}$$

$$- P_\varepsilon(z) = z^n + q_\varepsilon(z), \deg q_\varepsilon < n, q_0(z) \equiv 0;$$

$$- H(z, \varepsilon) - \text{ голоморфная, } H(0, 0) \neq 0.$$

Многочлен $q_\varepsilon(z)$: $q_0(z) \equiv 0$ называется многочленом Вейерштрасса.

Следствие теоремы: комплексный предельный цикл не исчезает при малом изменении параметров.

Петровский и Ландис в своей работе сформулировали **теорему о сохранении циклов**: при движении вдоль пути в пространстве коэффициентов комплексный цикл сохраняется, путь при необходимости можно шевелить, уходя от “плохих” наборов коэффициентов и сохраняя циклы.

Идея их доказательства такова: значения параметров, при которых можно продолжить цикл, открыто (в силу теоремы Вейерштрасса); но одновременно замкнуто: выбирая правильного представителя класса гомотопий цикла на соответствующей римановой поверхности можно добиться того, что его длина не будет расти, и это дает возможность утверждать, что в пределе также будет существовать комплексный цикл.

Доказательство неудлинения цикла у Петровского и Ландиса оказалось ошибочным! Задача о сохранении циклов все еще открыта.

Лекция 2. Материализация резонансов и быстрая эволюция предельных циклов

2.1 Материализация резонансов (по Арнольду и Фату)

Пусть $f : z \mapsto \lambda z + \dots$ - голоморфное отображение, 0 - его неподвижная точка.

Свойства f во многом зависят от $|\lambda|$. Здесь и ниже $\lambda \neq 0$.

Теорема 2. При $|\lambda| \neq 1$, 0 - гиперболическая неподвижная точка, а f аналитически эквивалентно своей линейной части $f_0 : z \mapsto \lambda z$.

Случай $|\lambda| = 1$, то есть $\lambda = e^{2\pi i \varphi}$ распадается на два подслучая.

Теорема 3. $\varphi \notin \mathbb{Q} \iff$ существует формальный сопрягающий ряд $h : f = h^{-1} \circ f_0 \circ h$, где f_0 - линейная часть f .

Теорема 4. Если $\varphi \in \mathbb{Q}$, то есть $\varphi = \frac{p}{q}$, f формально эквивалентно

$$f_1 = \lambda z \left(1 + \sum a_k u^k \right),$$

где $u = z^q$ - резонансный моном.

Рассмотрим семейство уравнений (1):

$$f_\varepsilon = \lambda(1 + \varepsilon)z + F_\varepsilon(z), \quad (1)$$

где $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, $F_\varepsilon(z) = O(z^2)$.

Теорема 5. В семействе (1) от нуля отщепляется периодическая орбита периода q .

Иллюстрация:

Пусть $f_\varepsilon = \lambda(1 + \varepsilon)z + az^{q+1}$.

Тогда $f_\varepsilon^q = \lambda^q(1 + \varepsilon)^q z + bz^{q+1} + \dots$

Заметим, что $\lambda^q = 1$; обозначим $(1 + \varepsilon)^q = 1 + \delta$. Получаем:

$$f_\varepsilon^q = (1 + \delta)z + bz^{q+1} + \dots$$

Неподвижные точки соответствуют решениям уравнения $f_\varepsilon^q(z) = z$. То есть, пренебрегая старшими членами:

$$(1 + \delta)z + bz^{q+1} = z \Rightarrow \delta z + bz^{q+1} = 0 \Rightarrow z^q = -\frac{\delta}{b}.$$

Предложение 1. Если $f_0 = f_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, то $f_0^q = z + az^{q+1} + \dots$

Доказательство. $f_0^q = h^{-1} \circ f_1^q \circ h$. У f_1^q в разложении в ряд нет членов между z и z^{q+1} , значит, нет их и у f_0^q . \square

2.2 Философия Арнольда

- Вопрос сходимости линеаризующего ряда при $\varphi \notin \mathbb{Q}$: теоремы Зигеля и Брюно; Йоккоз в своих работах доказал необходимость условия теоремы Брюно.

- Арнольд: расходимость линеаризующего ряда объясняется геометрически?

Пусть $\lambda = e^{2\pi i\varphi}$, где φ – Лиувиллево.

Определим $\lambda_\varepsilon = e^{2\pi i(\varphi+\varepsilon)}$. Рассмотрим семейство уравнений:

$$\tilde{f}_\varepsilon = (\varphi + \varepsilon)z + \dots$$

Идея Арнольда:

$(\varphi + \varepsilon)$ принимает бесконечно много рациональных значений, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ вокруг нуля накапливаются периодические орбиты. Однако у линейного отображения такой картинке не возникает.

(Идея реализована А.С.Пятли и развита Перец-Марко, однако условия лиувиллевости λ сильнее, чем у Брюно и Йоккоза).

2.3 Быстрая эволюция предельных циклов

Стратегия Петровского–Ландиса:

Определение 1. Многочлен H_{n+1} называют ультраморсовским, если он морсовский, и его линии уровня трансверсальны бесконечности.

Рассмотрим интегрируемое уравнение $dH = 0$, гдк H – ультраморсовский.

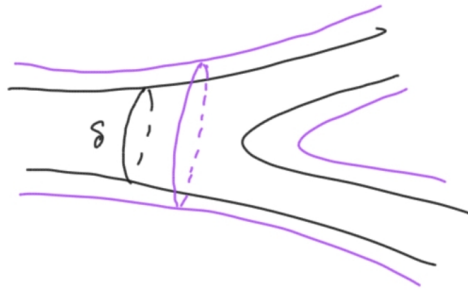
По Николаю Димитрову: рассмотрим $\omega_\varepsilon = dH + \varepsilon\omega = 0$, где $\varepsilon \in (\mathbb{C}, 0)$. При сколь угодно малом ε есть комплексный цикл $\omega_\varepsilon = 0$, который при $\varepsilon \rightarrow 0$ покидает “большую область” и не “садится” на циклы $dH = 0$.

Что же это за цикл?

Возьмем цикл δ . Его отображение Пуанкаре – $f_\varepsilon = z + \varepsilon g(z, \varepsilon)$.

Критерий Пуанкаре–Понтрягина:

Цикл δ рождает предельный цикл, если $I(h) \equiv \int_{\delta(h) \subset (H=h), \delta=\delta(h_0)} \omega$, $I(h_0) = 0$ и $I(h) \neq 0$.



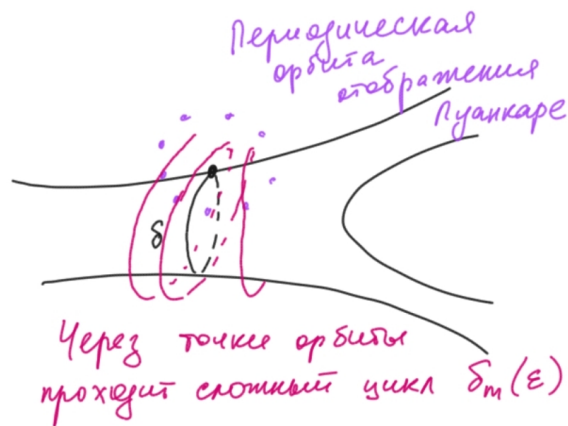
Семейство отображений Пуанкаре (после замены $z \mapsto z + g(\varepsilon)$):

$$P(z, \varepsilon) = z + \varepsilon F(z, \varepsilon),$$

$$F(0, \varepsilon) = 0, F'(0, \varepsilon) \neq 0.$$

Возникает материализация резонансов в “большинстве” семейств:

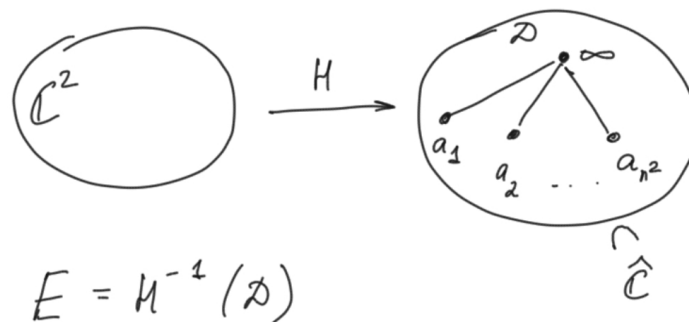
\exists последовательность $m_k \rightarrow +\infty$, что $P_\delta(z, \varepsilon_k)$ имеет периодическую орбиту, близкую к 0, периода m_k .



У отображения $z \mapsto z + \varepsilon z + \dots$ цикл $\delta_m(\varepsilon)$ близок к кривым интегрального уравнения, но при $\varepsilon \rightarrow 0$ он сбежит из любой окрестности δ .

Философское противоречие!

2.4 Усиление



Теорема 6 (Димитров). Цикл $\delta_m(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ не определен при достаточно малых ε , он выходит на ∂E .

Лекция 3. Одна теорема о сохранении

3.1 Отображение Эно

Отображение Эно имеет следующий вид:

$$H : (x, y) \mapsto (y, P(y) - ax) \quad (2)$$

- Это автоморфизм при $a \neq 0$ (при $a = 0$ проваливаемся в одномерие).

- Якобиан отображения: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a & P'(y) \end{vmatrix} = a$.

- Неподвижные точки отображения лежат на диагонали:

$$(x, y) = (y, P(y) - ax) \Rightarrow x = y, P(y) = (a + 1)y.$$

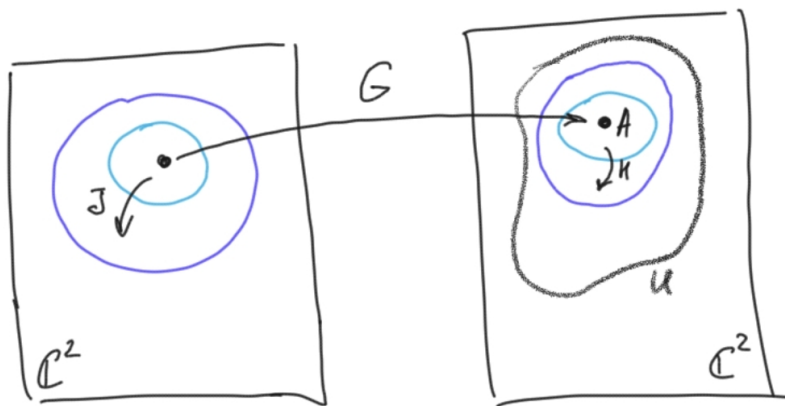
3.2 Отступление: области Фату

$U \subsetneq \mathbb{C}^2$ называется **областью Фату**, если существует биголоморфное отображение $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow U$.

Построим область Фату с помощью отображения Эно H .

Пусть A, B – неподвижные точки H , и $J = \frac{\partial H}{\partial(x, y)}(A) \sim \text{diag}(\lambda, \mu)$, причем $|\lambda| > 1$, $|\mu| > 1$.

Тогда A – гиперболическая точка, и H в окрестности A аналитически эквивалентно своей линейной части $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.



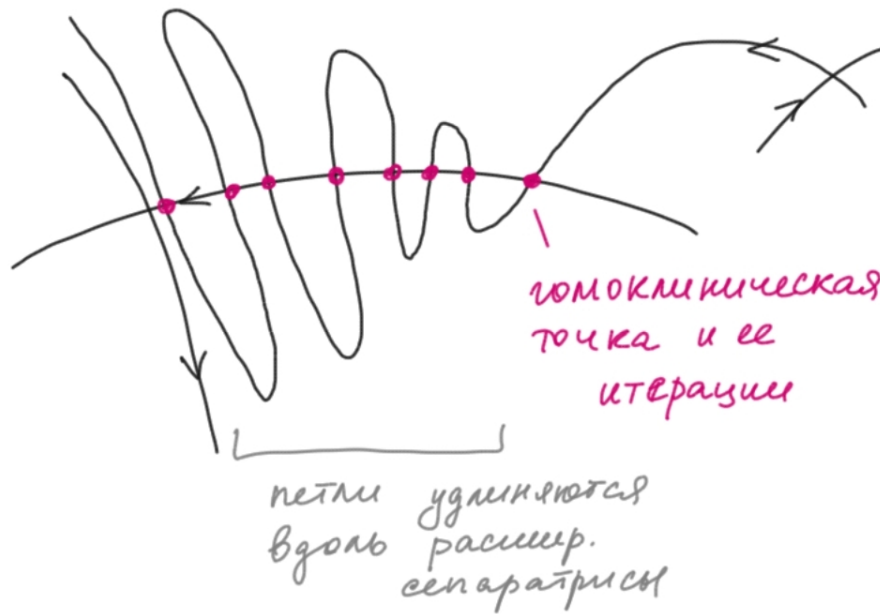
Определим G как сопрягающее отображение для J и H . G продолжается на все \mathbb{C}^2 : итерации J достигают любой точки в прообразе. Однако $G(\mathbb{C}^2) \neq \mathbb{C}^2$, так как в образе G не должно быть неподвижных точек, отличных от A (у линейного J неподвижная точка ровно одна), значит, $B \notin G(\mathbb{C}^2)$.

Значит, $U = G(\mathbb{C}^2)$ – область Фату.

3.3 Гомоклинические точки

Имеются две неподвижные точки диффеоморфизма типа "седло у одного мультипликатор больше 1, у другого - меньше. У них есть сепаратрисы - инвариантные одномерные многообразия. [Теорема Адамара-Перона!]

Определение 2. Гомоклиническая точка - это точка пересечения сепаратрис.



3.4 Теорема о сохранении

В случае отображения Эно, неподвижные точки алгебраически зависят от параметров, сепаратрисы и, следовательно, гомоклинические точки - трансцендентно. Теоретически возможна ситуация, в которой при проходе по пути в пространстве параметров длина сепаратрисы постоянно растет, становится бесконечной, и гомоклиническая точка исчезает.

Следующая теорема отрицает последний сценарий.

Пусть $\alpha_0 := (H_0, p_0, q_0, \lambda_0, \mu_0)$, где

- H_0 - исходное фиксированное отображение;
- p_0, q_0 - его неподвижные точки;
- λ_0, μ_0 - мультипликаторы неподвижных точек, причем $|\lambda_0| < 1, |\mu_0| > 1$.

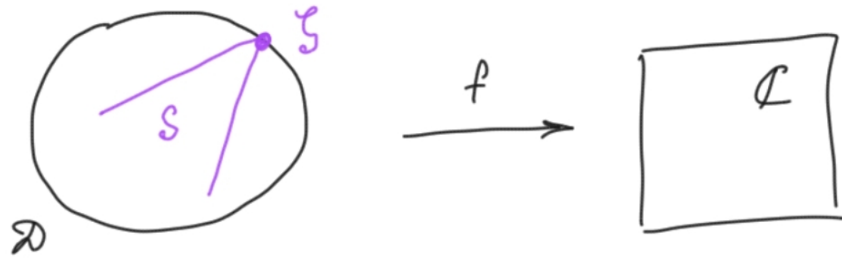
Теорема 7. Для любого пути в пространстве параметров

$$\gamma : I \rightarrow M_{pot} = \{(H, p, q, \lambda, \mu) : |\lambda| < 1, |\mu| > 1\},$$

и любого $\varepsilon > 0$ существует ε -близкий к γ путь γ_ε с тем же началом, вдоль которого гомоклиническая точка продолжается.

3.5 Точки Фату и Плеснера

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ - голоморфная функция. Рассмотрим в D угол Штольца S с вершиной в ζ .



Определение 3. ω - *предельное значение f в угле Штольца S* , если существует последовательность $z_n \in S, z_n \rightarrow \zeta$ такая, что $f(z_n) \rightarrow \omega$.

Определение 4. ζ - *точка Фату*, если f имеет в ζ единственное предельное значение в $\hat{\mathbb{C}}$.

Определение 5. ζ - *точка Плеснера*, если множество предельных значений в ζ совпадает с \mathbb{C} .

Теорема 8. (Плеснер) Для голоморфной функции f почти все точки на границе диска - либо точки Фату, либо точки Плеснера.

3.6 Параметризация сепаратрис

Теорема 9. Для любой сепаратрисы W комплексного седла существует биголоморфное отображение $\tau : \mathbb{C} \rightarrow W$.

Как следствие, каждой гомоклинической точке соответствует пара $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2$, гомоморфно зависящая от $\alpha \in M_{pot}$.

[Тут под ковер заметена аккуратистика про однозначность выбора этих координат].

Теорема 10 (Теорема об отображении Эно). Для отображения Эно существует такой компакт в \mathbb{C}^2 , что все гомоклинические точки лежат в нем.

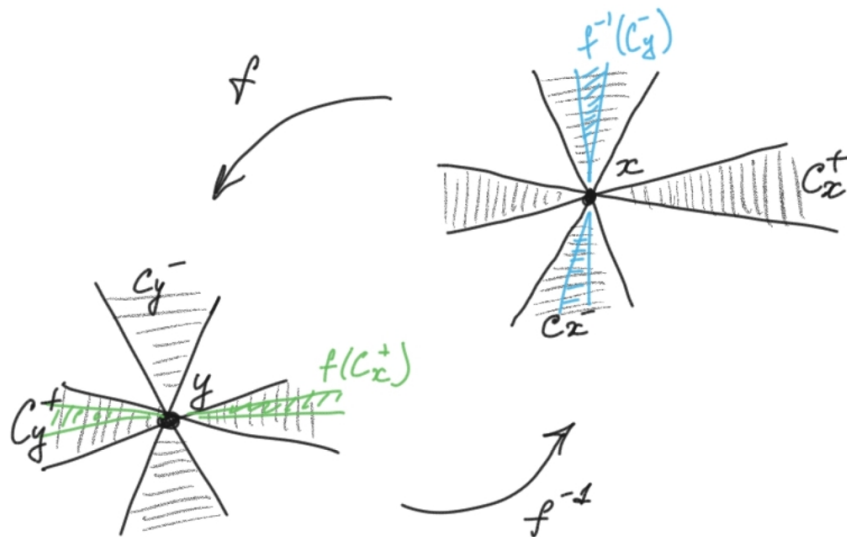
В несколько шагов из этой теоремы можно получить теорему о продолжении.

3.7 Вновь стратегия Петровского–Ландиса

Теорема 11. Типичное отображение Эно обладает свойством Купки-Смейла (не имеет гомоклинических касаний).

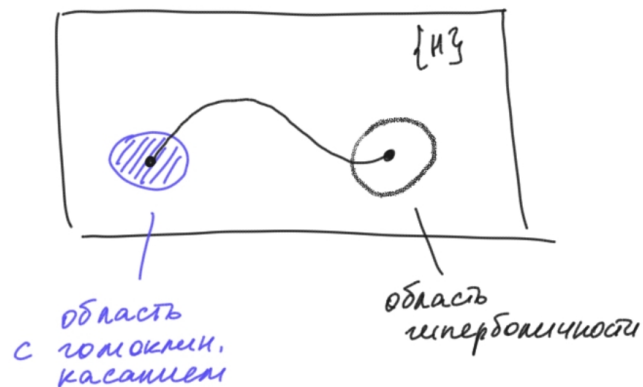


Прежде чем переходить к доказательству, сформулируем условие конусов, выполнение которого гарантирует гиперболичность.



Условие конусов выполнено, если C_x^+ под действием f растягивается и целиком оказывается в C_y^+ , а C_y^- под действием f^{-1} растягивается и целиком оказывается в C_x^- . (Тем самым сепаратриса W^u лежит в C^+ , сепаратриса W^s – в C^- .)

Доказательство теоремы. Пусть есть область (точка и ее окрестность) с гомоклиническим касанием. Пустим из нее кривую γ и поведем ее в область гиперболичности. По условию конусов в этой области гомоклинического касания нет, иначе бы пересекались конусы C^+ и C^- .



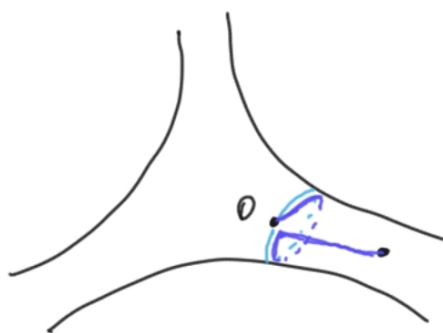
Однако вдоль кривой гомоклиническое касание должно сохраняться, так как это аналитическое условие на определитель (требуем коллинеарность), зависящее от параметров. Получили противоречие. \square

Лекция 4. Одновременная униформизация и теорема о сохранении

4.1 Преобразование наложения

Универсальная накрывающая с данной базисной точкой O – это пространство классов гомотопных путей (т.е. кривых) с началом в точке O .

Преобразование наложения добавляет ко всем путям петлю из O в O .



[Прибавили к пути голубую петлю и получили синий путь.]

Преобразование наложения - отображение универсальной накрывающей в себя. После униформизации получаем биголоморфное отображение единичного диска в себя.

Всякое биголоморфное отображение диска в себя - дробно-линейное преобразование. Тем самым мы получаем на самом деле отображение фундаментальной группы в подгруппу группы дробно-линейных преобразований диска в себя. Эта подгруппа дискретна (ее орбиты накапливаются к границе диска).

Исходная риманова поверхность - фактор диска по этой подгруппе дробно-линейных преобразований - преобразований наложения!

Предложение 2. *Не бывает одновременной униформизации на единичном диске.*

Доказательство. Пусть $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ - многочлен. Пусть $\varphi_h = H^{-1}(h)$.

Предположим, что мы одновременно униформизовали близкие φ_h и $\varphi_{h'}$ на единичный диск. Возникла фуксова группа преобразований G_h .

Это группа дробно-линейных преобразований. Они зависят от h , но все отображают единичную окружность в единичную окружность. Такая голоморфная функция может быть только постоянной по h : заменим круг на полуплоскость, тогда функция голоморфна по h , но при всех h принимает вещественные значения на вещественной прямой; такая функция может быть только постоянной.

Получается, что для всех h группа G_h одна и та же - постоянная. Но тогда линии уровня H конформно эквивалентны, однако известно, что это не так. Противоречие. \square

4.2 Что такое одновременная униформизация?

Рассмотрим уравнение $\dot{z} = P(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$.

Пусть для $b \in \mathbb{C}^2$ φ_b - фазовая кривая, проходящая через b , $\hat{\varphi}_b$ - универсальная накрывающая с базисной точкой b , B - трансверсальное сечение фазовых кривых в окрестности точки b .

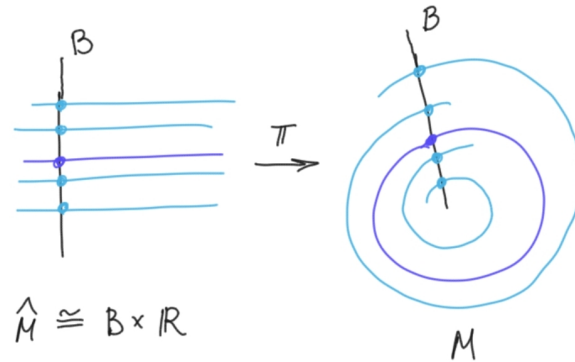
Определим:

- $M = \bigcup_{b \in B} \varphi_b$,
- $\hat{M} = \bigcup_{b \in B} \hat{\varphi}_b$,
- $\pi : \hat{M} \rightarrow M$.

Теорема 12. \hat{M} - комплексное многообразие, для которого π локально биголоморфно.

Важная ремарка: \hat{M} - косо́й цилиндр!

Вещественный пример

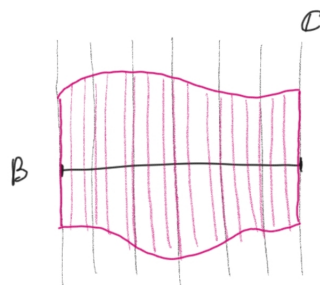


Канонический косой цилиндр

$$M_0 \subset B \times \mathbb{C}.$$

Каноническая проекция: $\pi_0 : M_0 \rightarrow B$, $\psi_b = \pi_0^{-1}(b)$ – топологический диск.

В некотором смысле косой цилиндр – это набор зависящих от параметра топологических дисков.



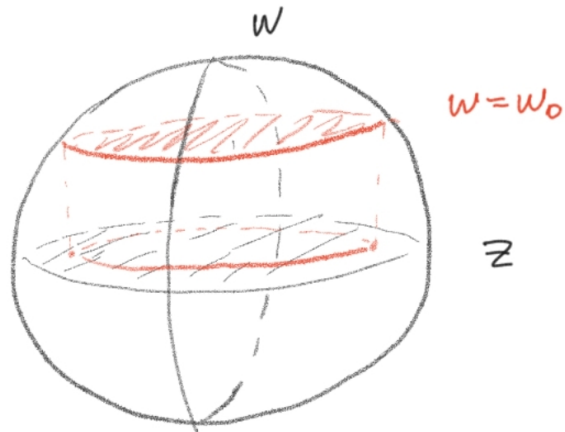
Одновременная униформизация

Биголоморфное отображение H – одновременная униформизация, если диаграмма ниже коммутативна. Слой косого цилиндра переходит в топологический диск.

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{H} & M_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_0 \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

4.3 Пример

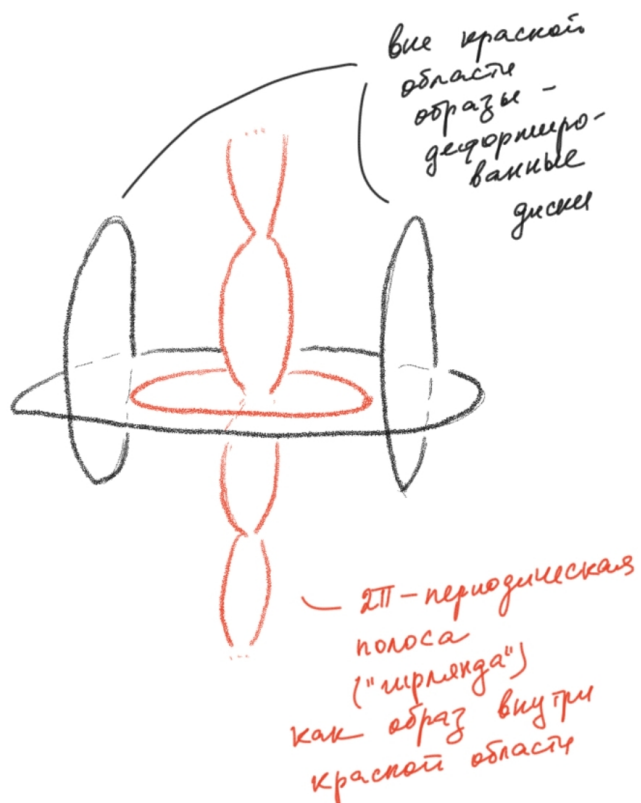
$$B(0; 1) \subset \mathbb{C}^2.$$



Одновременная униформизация:

$$(z, w) \mapsto (z, \ln(w - w_0)) \quad (3)$$

Канонический косой цилиндр выглядит так:



Определение 6. Канонический косой цилиндр имеет непрерывную границу, если каждый слой есть топологический предел близких слоев.

4.4 Одновременная униформизация и теорема о сохранении

"Теорема" (детали опущены). *Одновременная униформизация + непрерывность границы канонического косоугольного цилиндра + условия на преобразование наложения и проч. \Rightarrow теорема о сохранении цикла.*

Объяснение на уровне примера из 4.3

Имеется цикл, зависящий от параметра. С ним связано преобразование наложения, которое голоморфно зависит от параметра. Оно переводит слой соответствующего канонического цилиндра в себя.

Хотим доказать, что при выходе на границу красного диска, цикл не может разрушаться, если выполняются два условия.

Предположим, что у нас есть семейство римановых поверхностей, на них есть семейство циклов, и предположим, что это семейство продолжается до границы красного диска (исключительно). Хотим продолжить циклы в точки границы.

Два условия:

- циклам, которые соответствуют красному диску в базе, соответствует преобразование наложения; предположим, что при подходе к границе красного диска они имеют предел (как в примере);
- предположим, что ОУ лучше, чем в примере, и соответствующий канонический косоугольный цилиндр имеет непрерывную границу.

Тогда предельное преобразование наложения тоже будет биголоморфным отображением универсальной накрывающей над соответствующим слоем в себя. И проекция кривой, которая соединяет образ и прообраз, будет циклом на слое, который соответствует точке на границе красного диска.

"условия на преобразование наложения и проч."

Рассмотрим ситуацию: $\dot{z} = P(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$, P вещественно. Есть особая точка 0 типа центр, все вещественные фазовые кривые в окрестности 0 замкнуты. Циклы в окрестности 0 имеют тождественное преобразование монодромии, и так и называются - **тождественные циклы**. Но семейство вещественных тождественных циклов обычно не покрывает всю плоскость, а ограничено сепаратрисным многоугольником.

Эту вещественную картинку можно погрузить в комплексную плоскость. Тогда можем начальное условие продолжать по кривой, которая ушла из вещественной плоскости, а тождественный цикл с начальным условием на этой кривой сохранится. До каких пор можно продолжить цикл вдоль такой кривой? Будут ли тождественные комплексные циклы выживать для почти всех начальных условий?

Рассмотрим кривую и трансверсальный ей диск. Пусть для начальных условий в диске меньшего радиуса внутри этого трансверсального диска тождественный цикл есть. Попытаемся продолжить его до границы этого меньшего диска.

Гипотеза 1. *Для полиномиального дифференциального уравнения на комплексной плоскости $\dot{z} = P(z)$, имеющего тождественный цикл и плотные комплексные фазовые кривые, выполнено следующее.*

Пусть $B \subset \mathbb{C}^2$ – диск, трансверсальный фазовым кривым. Тогда

- \hat{M} допускает одновременную униформизацию $H : \hat{M} \rightarrow M_0$.
- M_0 имеет непрерывную границу.
- $M_0 = \{(z, w)\}$, $M_0 \subset B \times D_R$, $M_0 \supset B \times D_r$, где D_r и D_R – диски с центром в нуле с радиусами $r < R$.

Предложение влечет за собой следующую теорему.

Теорема 13. Пусть γ_b – цикл на φ_b , непрерывный по B и определенный при всех $b \in D \subset \overline{D} \Subset B$. Тогда цикл γ_b продолжается на почти все слои φ_b для $b \in \partial D$.

Для доказательства теоремы потребуются теоремы Кёбе об искажении.

Теорема 14 (Теоремы Кёбе об искажении). Пусть $f : D \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ – конформное отображение единичного диска. Пусть $f(0) = 0, f'(0) = 1$. Тогда $f(D) \supset D_{0, \frac{1}{4}}$ и $f(D_r) \subset D_{R(r)}$ при $R(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$.

Набросок доказательства Теоремы 13. Пусть $f_b : \psi_b \rightarrow \psi_b$ – преобразование наложения, соответствующее γ_b .

Из теоремы Кёбе следует, что $f_b(0)$ и $f'_b(0)$ ограничены, $f_b(0)$ по модулю меньше R .

Вспомним еще две полезные теоремы:

- Теорема Фату: ограниченная голоморфная функция в диске имеет почти всюду угловые пределы.
- Теорема Привалова: если ограниченная голоморфная функция в диске стремится к 0 на множестве границы положительной меры, то сама функция есть тождественный ноль.

Применяя эти теоремы и теорему Кёбе получаем, что у преобразования наложения значения $f_b(0)$ ограничены и отделены от нуля, и производные в нуле ограничены и отделены от нуля.

Следовательно, по теореме Асколи-Арцела, для последовательности $b_n \in D$, сходящейся к $b_0 \in \partial D$, $f_{b_n} \rightarrow f_{b_0}$ в компактах. \square

Лекция 5. Непродолжимость голономии

5.1 Пример

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \\ (t, r) &\in S^1 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

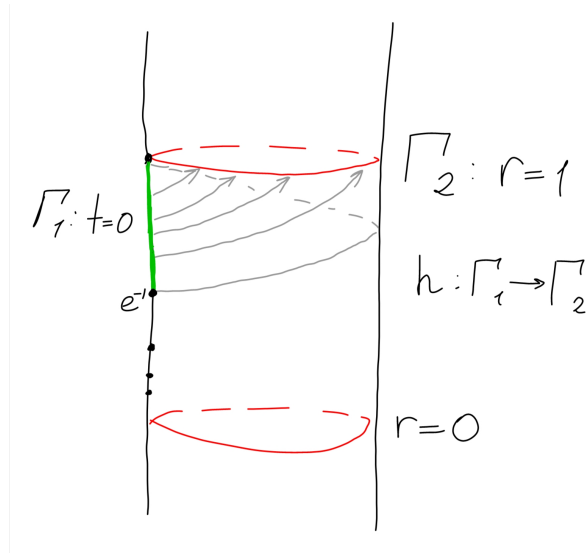


Рис. 1: Отображение h не продолжается в точку $r = 0$.

5.2 Уравнение Риккати

$$\dot{\omega} = A(t) \omega, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\dot{\omega}_1 \omega_2 - \dot{\omega}_2 \omega_1}{\omega_2^2} \\ &= \frac{(a \omega_1 + b \omega_2) \omega_2 - (c \omega_1 + d \omega_2) \omega_1}{\omega_2^2} \\ &= b + (a - d) z - c z^2. \end{aligned}$$

В отличие от исходного уравнения, где монодромия была линейна, в уравнении Риккати монодромия дробно-линейна.

a_j - полюса коэффициентов.

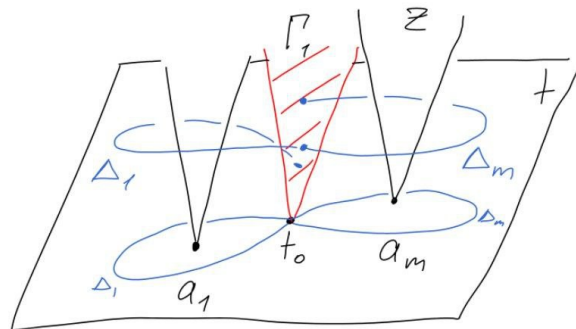


Рис. 2: $\Delta_1, \dots, \Delta_m : (\Gamma_1 = \mathbb{C}) \rightarrow \Gamma_1$

Проблема Римана-Гильберта

$$\dot{\omega} = \frac{A_1}{t - a_1}\omega + \frac{A_2}{t - a_2}\omega; \quad M_1, M_2 \text{ реализуются}$$

Любая конечно порожденная группа дробно-линейных преобразований реализуется уравнениями Риккати.

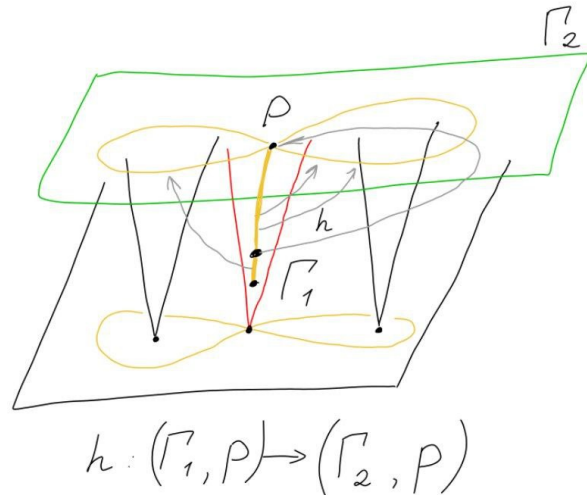


Рис. 3: На трансверсали Γ_1 образуется последовательность дуг (каждая из которых отображается h в некоторую петлю на Γ_2), которая сходится к некоторой точке.

Теорема 15. $h : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ не продолжается вдоль специальных кривых, конец которых – предельная точка группы монодромии.

5.3 Линейные неавтономные уравнения 1 порядка

$$\dot{z} = a(t)z + b(t)$$

$$a(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{t - a_j}$$

Монодромии задаются аффинными преобразованиями.

$$\Delta_j(z) = A_j z + B_j$$

$$A_j = e^{2\pi i \lambda_j}$$

Пусть неподвижные точки C_j отображений Δ_j все различны и не лежат на одной прямой; λ_j чисто мнимые и такие, что

$$A_j \in (0, 1)$$

Тогда предельные точки группы, порожденной отображениями Δ_j - весь треугольник $C_1 C_2 C_3$.

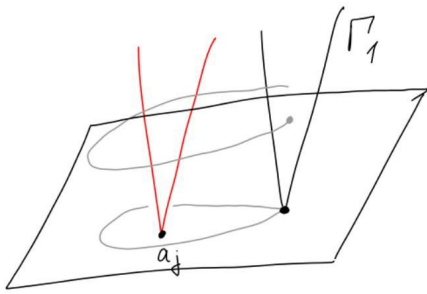


Рис. 4: $t_0 \neq a_j$, $\Gamma_1 = (t = t_0)$

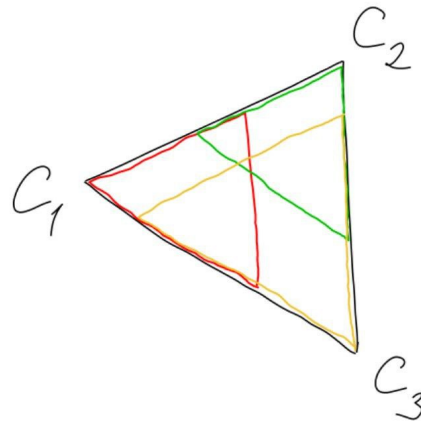


Рис. 5: Предельные точки весь треугольник.

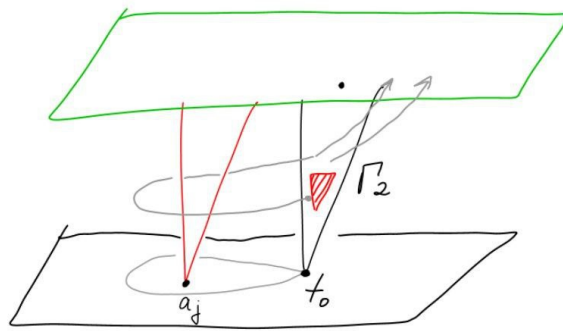


Рис. 6: В целый треугольник не продолжается голономия.

5.4 Подобие соленоида

$$\dot{z} = P(z), \quad z \in \mathbb{C}^2$$

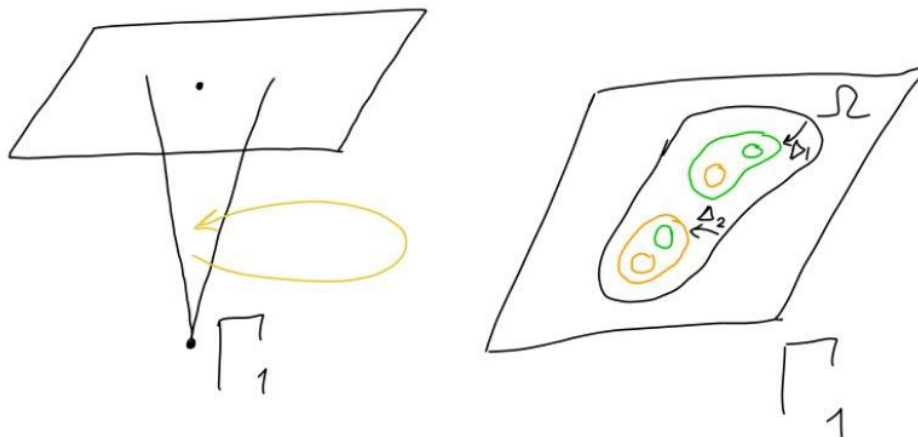


Рис. 7: Символическая динамика на трансверсали Γ_1 .

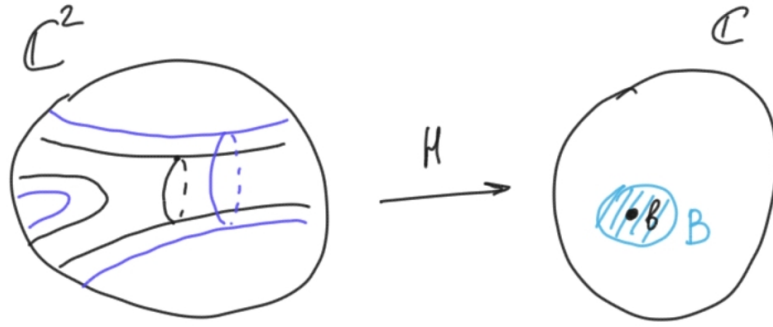
Каждой последовательности из 0 и 1 соответствует предельная точка полугруппы $G^+(\Delta_1, \Delta_2)$. Множество предельных точек Канторово. В него не продолжаются отображения голономии $h : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$.

Дешевые комплексные циклы.

Лекция 6. Одновременная униформизация клейновыми группами

6.1 Семейство некритических слоев-линий уровня многочлена от двух переменных

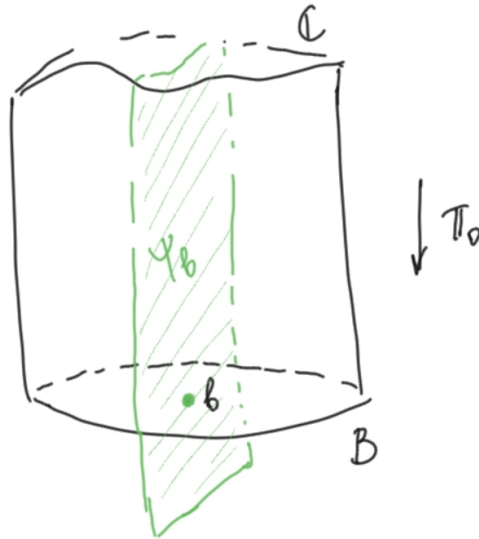
Пусть $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ - ультраморсовский многочлен. Пусть $b \in B \subset \mathbb{C}$ - некритическое значение H с окрестностью B .



Обозначим:

- $\varphi_b = H^{-1}(b)$;
- $M = H^{-1}(B)$;
- $\hat{\varphi}_b$ – универсальная накрывающая над φ_b с базисной точкой b ;
- $\hat{M} = \bigcup_{b \in B} \hat{\varphi}_b$.

Напомним, что канонический косой цилиндр $M_0 \subset B \times \hat{\mathbb{C}}$ с проектированием $\pi_0 : B \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow B$ и слоями $\psi_b = \pi_0^{-1}(b)$ определен в п. 4.2.



Теорема 16. Существует канонический косой цилиндр M_0 и биголоморфное отображение (одновременная униформизация) $\mathcal{H} : \hat{M} \rightarrow M_0$, переводящее $\hat{\varphi}_b$ в ψ_b .

Другими словами, коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & M_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_0 \\ B & \xrightarrow{id} & B \end{array}$$

6.2 Почти комплексные структуры (ПКС) и уравнения Бельтрами

Определение 7 (Первое определение почти комплексной структуры). *Почти комплексная структура на поверхности φ – это набор отображений $J_z : T_z\varphi \rightarrow T_z\varphi$ таких, что $J_z^2 = -E$.*

Определение 8 (Второе определение почти комплексной структуры). *Почти комплексная структура на поверхности φ – это форма типа $(1,0)$ в комплексном смысле: $\omega(z) = a(z)dz + b(z)d\bar{z}$, $|a| > |b|$.*

Определение 9. *Функция f называется голоморфной в смысле почти комплексной структуры, если $df(z) = c\omega(z)$.*

Как зная ПКС “вспомнить” комплексную структуру? Необходимо в окрестности каждой точки найти функцию, голоморфную в смысле ПКС!

Требуем $df(z) = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \sim a dz + b d\bar{z}$, то есть

$$\frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} = \mu(z) \quad (4)$$

Это **уравнение Бельтрами**; $\mu(z)$ называют **коэффициентом Бельтрами**. В силу определения ПКС, $|\mu| < 1$.

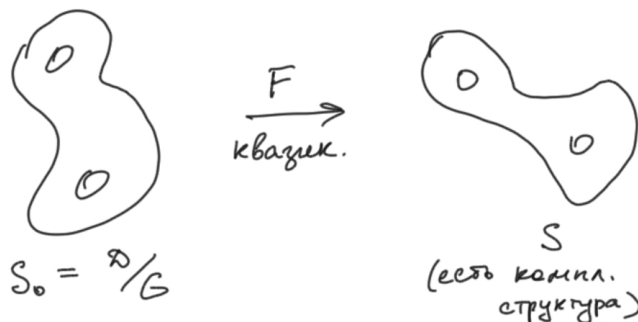
Теорема 17. *Если $|\mu| < q < 1$, То уравнение Бельтрами локально разрешимо.*

В случае замены координат $z \mapsto g(z)$, коэффициент Бельтрами меняется следующим образом: $\mu \mapsto \mu \circ g \frac{g_{\bar{z}}}{g_z}$. В случае отсутствия глобальной координаты говорим тогда не про коэффициент, а про **дифференциал Бельтрами**.

Два решения одного уравнения Бельтрами связаны: одно есть голоморфная функция от другого!

Теорема 18 (Альфорт–Берс, 1960). *Если дифференциал Бельтрами голоморфен по параметру на всей \mathbb{C} , то решения уравнения Бельтрами тоже голоморфны по этому параметру.*

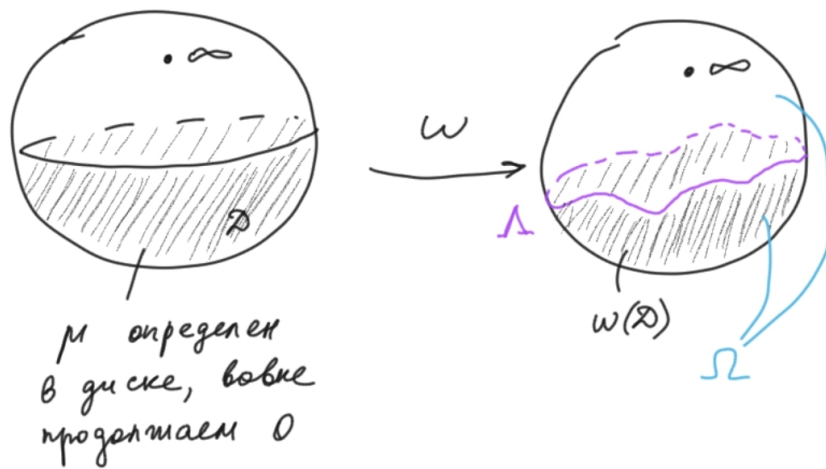
6.3 Квазиконформные деформации



Пусть $F : S_0 \rightarrow S$ - квазиконформное отображение, а именно $dF = adz + bd\bar{z}$, $|b| < |a|$, $|\frac{b}{a}|$ отделен от 1. Пусть $S_0 = D/G$, где D - единичный круг, G - фуксова группа, а на S есть комплексная структура.

Рассмотрим $\omega := dF$ как форму на S_0 . С помощью пулбэка комплексная структура с S может быть перенесена на S_0 . Тем самым можем получить на S_0 ПКС, а далее поднять ее на \hat{S}_0 и на D с помощью униформизации.

Соответствующий дифференциал Бельтрами $\mu = \frac{\omega_{\bar{z}}}{\omega_z}$ на диске D G -инвариантен. В таком случае, для всякого дробно-линейного преобразования $g \in G$ $\omega \circ g$ - тоже решение уравнения Бельтрами.



Продолжим дифференциал μ на всю сферу - нулем - и возьмем ω как решение соответствующего уравнения Бельтрами. $\omega \circ g$ - тоже решение этого уравнения.

Но одно решение уравнения Бельтрами - голоморфная функция от другого решения. Значит, существует такая голоморфная функция $g_1 : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, для которой $\omega \circ g = g_1 \circ \omega$. Следовательно, g_1 - тоже дробно-линейное преобразование.

Соответствующая группа $G_1 = \{g_1\}$ изоморфна G .

Более того, $\omega(D)/G_1 = S$.

G_1 называют **квазифуксовой группой**. Обозначим через \bar{D} дополнение к замкнутому единичному диску. Группа G_1 дискретно действует на области $\Omega = \omega(D \cup \bar{D})$. Дополнение к Ω называется областью разрывности Λ . Имеем:

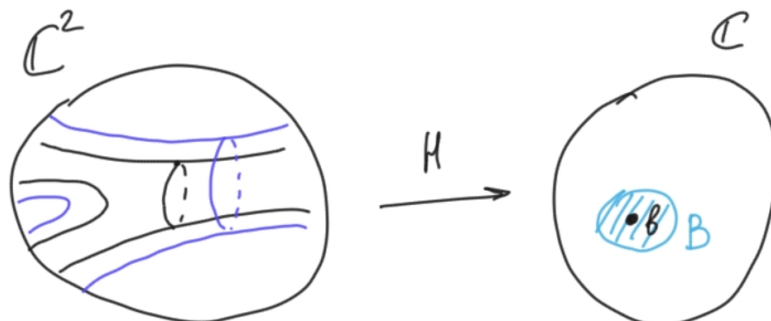
$$(D \cup \bar{D})/G = S_0 + \bar{S}_0 \quad (5)$$

$$\Omega/G_1 = S + \bar{S}_0 \quad (6)$$

Говорят, что квазифуксова группа G_1 униформизует пару S, \bar{S}_0 .

6.4 Одновременная униформизация

Вспомним картинку из начала лекции. Пусть H и φ_b - те же, что и в п. 6.1.



Введем метрику Фубини - Штуди на проективном замыкании комплексной плоскости. Возьмем комплексные нормали к одному слою φ_{b_0} . Можно доказать, что они задают диффеоморфизм слоя на близкие. Так как это комплексные прямые со своей комплексной структурой, сам диффеоморфизм не будет аналитическим, но дифференциал Бельтрами будет голоморфно зависеть от параметра.

Пусть G_0 - фуксова группа, униформирующая $\varphi_{b_0} : D/G_0 = \varphi_{b_0}$. Рассмотрим построенный выше голоморфно зависящий от b дифференциал Бельтрами в D . Продолжим его нулем в \bar{D} . Получим на всей сфере Римана дифференциал Бельтрами, голоморфно зависящий от b . Пусть ω_b - решение соответствующего уравнения Бельтрами, голоморфно зависящее от b . Оно существует по теореме Альфорса - Берса. Положим:

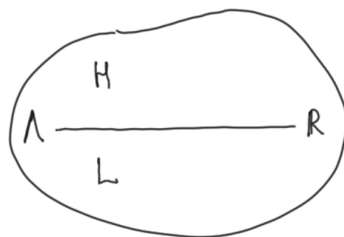
$$G_b = \omega_b \circ G_0 \circ (\omega_b)^{-1}.$$

Фактор группы G_b - это $\varphi_b + \bar{\varphi}_{b_0}$. Положим: $\psi_b = \omega_b(D)$, $M_0 = \cup_{b \in B} \psi_b$. Тогда M_0 биголоморфно эквивалентно пространству универсальных накрывающих над слоями φ_b ; одновременная униформизация слоев, близких к φ_{b_0} , осуществлена.

Лекция 7. Клейновы группы и униформизация

7.1 Фуксовы и квазифуксовы группы

Пусть G - группа дробно-линейных преобразований, конечно порожденная m образующими, сохраняющими \mathbb{R} . Такая группа называется фуксовой.



Обозначим $\Omega = H + L$.

Тогда $\Omega/G = S_0 + \overline{S_0}$, и $S_0, \overline{S_0}$ - симметричные римановы поверхности типа (g, n) .

Дифференциал Бельтрами, равный μ на H и нулю на L , инвариантен относительно G .

Пусть h - решение уравнения Бельтрами; тогда $G_1 = h \circ G \circ h^{-1}$ - это квазифуксова группа.

Положим $\Omega_1 = h(\Omega)$. $\Omega_1/G_1 = S + \overline{S_0}$.

7.2 Теорема конечности Альфорса

Теорема 19 (1964). Пусть G - любая конечно порожденная клейнова группа, Ω - максимальное открытое множество, на котором она действует дискретно. Тогда Ω/G представляет собой конечное число римановых поверхностей конечного типа.

Доказательство теоремы. Известно, что в случае гиперболических поверхностей

- $\dim_{\mathbb{C}}(\text{риманова поверхность рода } g) = 3g - 3$;
- $\dim_{\mathbb{C}}(\text{риманова поверхность типа } (g, n)) = 3g - 3 + n$.

Если у двух клейновых групп факторы не конформно эквивалентны, то и группы не эквивалентны.

[Далее частное рассуждение, иллюстрирующее общее.]

Фактор состоит из римановых поверхностей - но конечного или бесконечного числа? Каждая из них называется компонентой фактора.

Пусть клейнова группа имеет t образующих. Размерность пространства всех таких клейновых групп - $3t - 3$, если рассматривать их с точностью до эквивалентности.

Предположим, что одна из компонент фактора есть риманова поверхность типа (g, n) такого, что $3g - 3 + n > 3t - 3$.

Умеем квазиконформно деформировать фуксову группу, отображая одну из компонент ее фактора на риманову поверхность с другой комплексной структурой. Прodeформируем так же нашу клейнову группу. Возьмем компоненту фактора, существование которой предположили выше, и отображим ее диффеоморфно квазиконформно на риманову поверхность типа (g, n) , но с другой комплексной структурой. Возьмем

соответствующий дифференциал Бельтрами. Возьмем полный прообраз этой компоненты фактора при проектировании. Поднимем дифференциал Бельтрами на весь этот прообраз, а на дополнении положим его равным нулю. Решим соответствующее уравнение Бельтрами, получим отображение h (как в теории квазифуксовых групп), которое гомеоморфно отображает сферу Римана на себя.

Знаем, что если сопрячь G отображением h , то получится другая группа дробно-линейных преобразований. Значит, получится квазиконформная деформация нашей клейновой группы. Фактором этой деформации будет тот же фактор, что был у изначальной группы - за исключением одной компоненты. Эта одна компонента будет "заказанной" римановой поверхностью типа (g, n) .

Получим множество клейновых групп, когда будем менять "заказанную" риманову поверхность, в некотором смысле параметризованное модулями из пространства модулей римановых поверхностей типа (g, n) . Размерность этого пространства модулей больше, чем $3t - 3$. Значит, получим слишком много неэквивалентных клейновых групп с t образующими.

Противоречие!

[Это идея доказательства того, что тип компонент фактора не может быть слишком большим. Та же идея работает на доказательство конечности числа компонент.] □

Важное замечание: сферы с тремя выколотыми точками (римановы поверхности типа $(0, 3)$) все конформно эквивалентны, пространства для квазиконформных деформаций нет. Наличие конечного числа таких компонент в факторе конечно порожденной клейновой группы доказывается отдельно, и мы не будем на этом останавливаться.

7.3 В-группы

Определение 10 (*В-группа*). *В-группа* – это клейнова группа, имеющая инвариантную компоненту $\Omega_0 \subset \Omega$, которая является топологическим диском.

Фуксовы и квазифуксовы группы являются *В-группами*.

Теорема 20 (Берс). *Существует В-группа G с инвариантной компонентой Δ_0 , фактор которой $S_0 = \Delta_0/G$.*

[Историческое замечание: термин В-группа был введен последователями Берса в честь него, так что в оригинальной версии теоремы термин не встречается.]

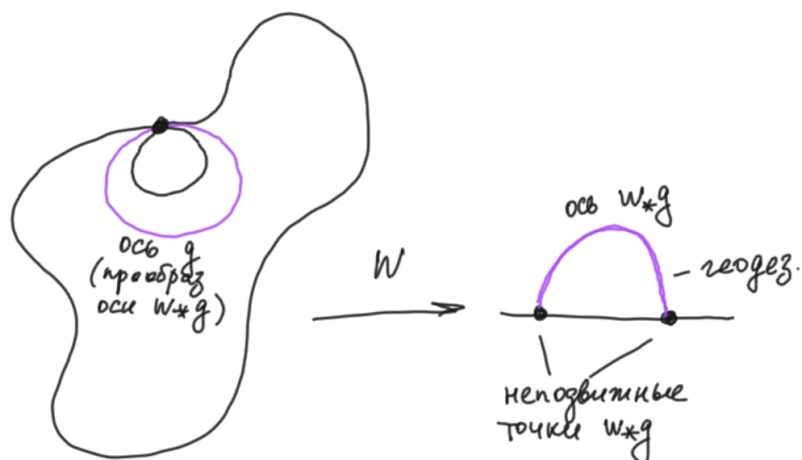
7.4 ППП - присоединенные параболические преобразования

У *В-группы* G есть фуксов эквивалент Γ .

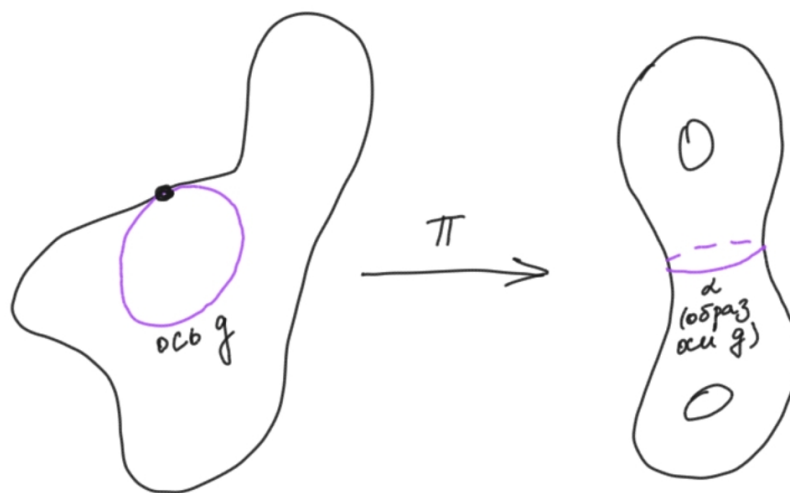
Рассмотрим конформное отображение $w : \Omega_0 \rightarrow H$. Тогда $\Gamma := w \circ G \circ w^{-1}$.

Определим $w_* : G \rightarrow \Gamma$.

Определение 11. $g \in G$ – присоединенное параболическое преобразование (ППП), если g – параболическое, а w_*g – гиперболическое.



7.5 Описание фактора В-группы



Теорема 21. Образ оси ППП при естественном проектировании $\pi : \Omega_0 \rightarrow S_0$ есть простая (то есть гомеоморфная окружности) замкнутая кривая $\alpha \in S_0$.

Базисом в множестве всех ППП назовем минимальное конечное множество ППП, с элементами которого сопряжены все остальные ППП. Введем следующие обозначения:

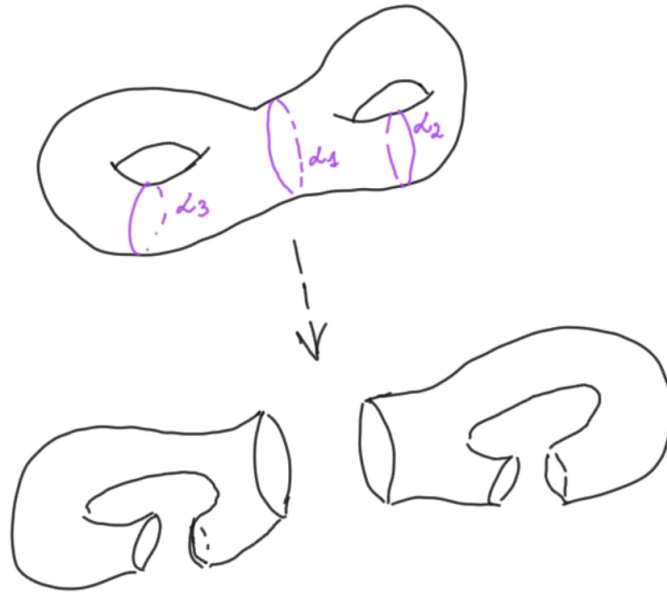
- τ_1, \dots, τ_m – базис ППП;
- $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ – их оси;

- $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - их проекции.

Теорема 22. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ - попарно непересекающиеся простые замкнутые кривые, попарно свободные негомотопные вместе с обратными.

Хотим кроме фактора S_0 получить остальные факторы группы G . Мы разрезаем S_0 по α_n . Затем в каждое место разреза вставляем проколотый диск. Получаются двумерные поверхности - пока без комплексной структуры.

Это поверхности, которые описывают топологический тип компонент фактора! Остальные компоненты фактора ("если повезет") - это римановы поверхности, гомеоморфные описанным выше двумерным поверхностям.



Как выглядят факторы группы G ? Надо раздать им комплексные структуры!

Если никому не "выдать" комплексную структуру, получаем фактор S_0 из теоремы Берса. Выбором же выдаваемых комплексных структур и выбором частей, которым ее даем, можно реализовать любой вариант фактора.

7.6 Униформизация В-группами

“Семейство алгебраических кривых униформизовано семейством В-групп”

Пусть G_b - В-группа, аналитическая по $b \in B$, где B - диск-база.

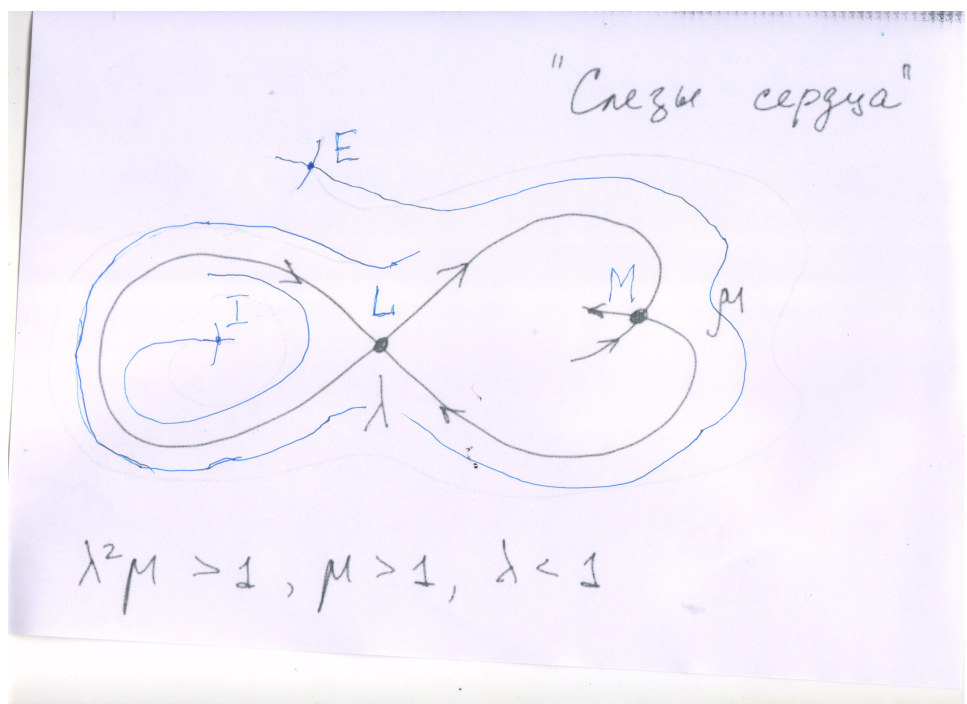
Семейство алгебраических кривых φ_b униформизовано группами G_b , если инвариантная компонента $G_b \sim \Omega_{0b}$, и $\Omega_{0b}/G_b = \varphi_b$.

Теорема 23. Семейство линий уровня ультраморсовского многочлена с одним критическим слоем униформизуется В-группами.

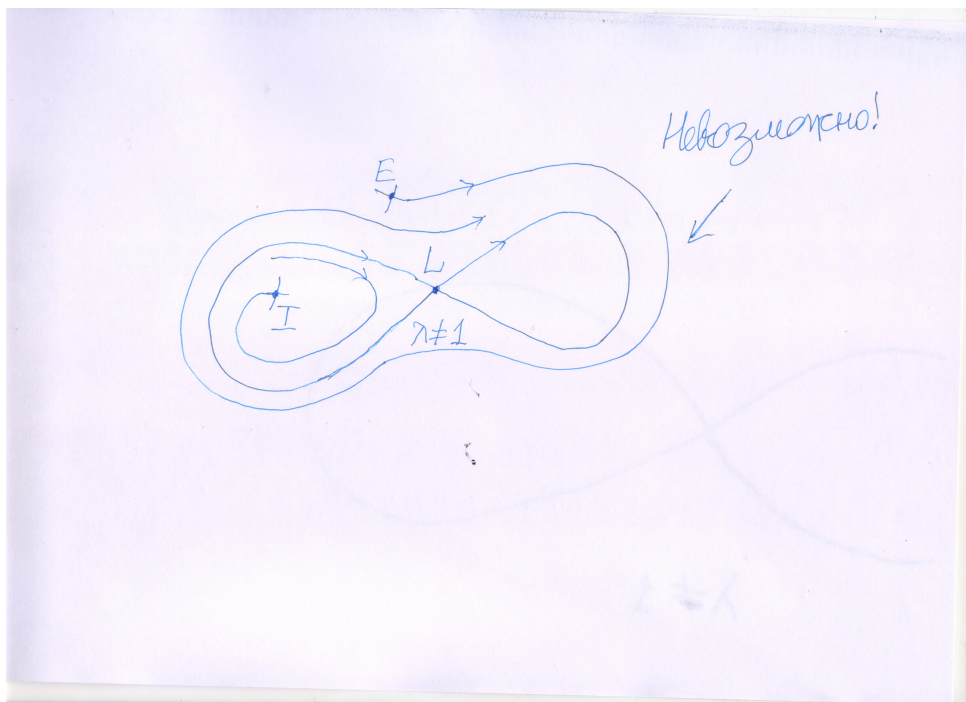
Если есть два критических слоя и соответствующие исчезающие циклы не пересекаются, то можно униформизовать B -группами семейство с двумя критическими слоями, двумя критическими значениями. Если эти циклы пересекаются, то нельзя.

Лекция 8. Структурно неустойчивые семейства и их инварианты

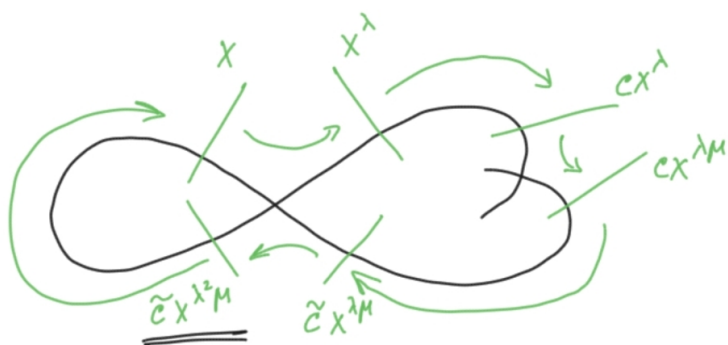
8.1 Слезы сердца



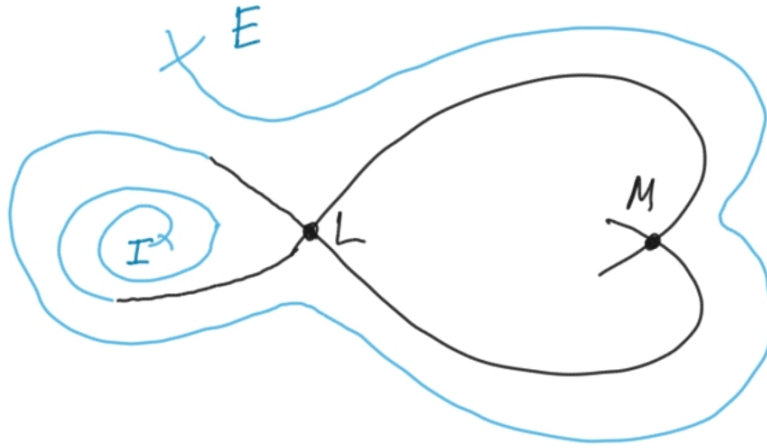
Ситуация, показанная на картинке ниже, не может встретиться в типичном двупараметрическом семействе: сепаратриса седла I , лежащего внутри петли сепаратрисы седла L , сматывается с этой петли, а сепаратриса седла E , лежащего вне "восьмерки", наматывается на "восьмерку". Это невозможно, если характеристическое число седла L отлично от единицы.



Требование $\lambda^2 \mu > 1$ необходимо для наматывания на полицикл сепаратрисы внешнего седла E , как показано на следующей картинке.



Рассмотрим следующую ситуацию:



Пусть ε_n – последовательность параметров, отвечающая появлению связки E и L , а δ_m – последовательность параметров, отвечающая появлению связки I и L .

Теорема 24. Если два типичных трехпараметрических семейства, возмущающих векторное поле с полициклом “слезы сердца”, топологически эквивалентны, то $\frac{\ln \lambda}{\ln \mu} =$

$$\frac{\ln \tilde{\lambda}}{\ln \tilde{\mu}}.$$

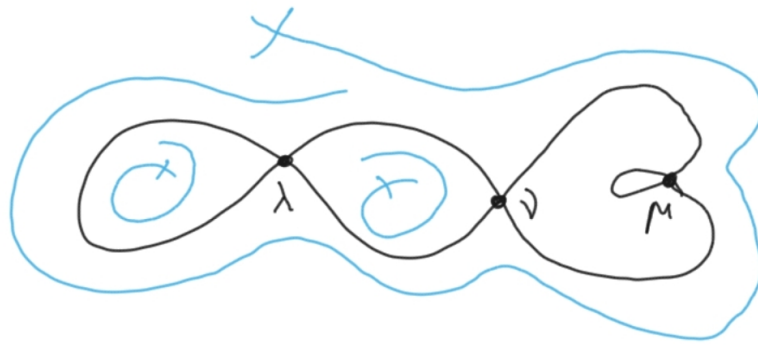
Определение 12 (Топологическая эквивалентность). Даны два семейства векторных полей на сфере, $V = \{v_\varepsilon\}$ и $W = \{w_\lambda\}$, зависящих от параметров ε и λ . Пусть $h : B \rightarrow \tilde{B}$ – гомеоморфизм баз параметров, и для любого ε существует гомеоморфизм фазовых пространств $H_\varepsilon : S^2 \rightarrow S^2$, сопрягающий фазовые портреты v_ε и $w_{h(\varepsilon)}$ с сохранением временной ориентации. Тогда говорят, что V и W слабо топологически эквивалентны.

Идея доказательства теоремы. Гомеоморфизм h переводит прямую с высеченными на ней значениями параметров ε_n и δ_m , которые сходятся к нулю, в прямую, на которой также отмечены две числовые последовательности ε'_n и δ'_m , сходящиеся к нулю. Разумеется, последовательности одного семейства должны наложиться на последовательности другого семейства. Этого несложно добиться для одной пары, скажем, для ε_n и ε'_n , однако чтобы и δ_m перешла под действием h в δ'_m , необходимо потребовать, чтобы значения δ_m “мелькали” относительно значений ε_n столь же часто, сколь и значения δ'_m относительно значений ε'_n .

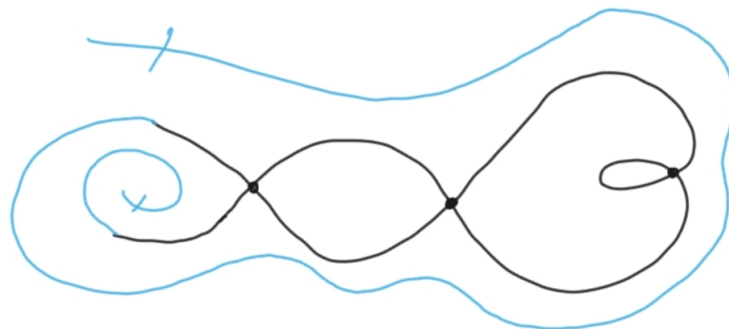
Выражение $\frac{\ln \lambda^2 \mu}{|\ln \lambda|}$ задает “относительную плотность” точек двух последовательностей, значит, должно быть инвариантом. Однако если такое выражение сохраняется, то сохраняется и $\frac{\ln \lambda}{\ln \mu}$. □

8.2 Функциональный инвариант

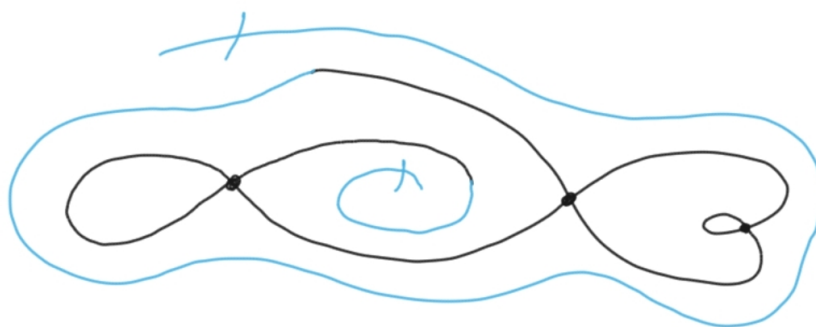
Рассмотрим модификацию “слез сердца”.



$$\lambda < 1, \lambda \nu < 1, \mu \lambda^2 \nu^2 > 1$$



Ⓘ 1-параметрическое сем-во \mathcal{E}



Ⓜ 1-параметрическое сем-во \mathcal{E}'

Для неё получаем инварианты $\frac{\ln \mu \lambda^2 \nu^2}{|\ln \lambda|}$ и $\frac{\ln \mu \lambda^2 \nu^2}{|\ln \lambda \nu|}$.

Рассмотрим еще одно 1-параметрическое семейство.



Никакой интересной бифуркации при размыкании этой сепаратрисы не происходит, но мы получаем дополнительный параметр возмущения семейства.

Эту сепаратрису можно размыкать и в I и II семействах. Инварианты вида, указанного выше, у семейств будут. Однако из-за изменения параметра, отвечающего за размыкание "петельки могут меняться расположение седел, их характеристические числа, а значит и значения инвариантов.

Для каждого векторного поля с наличием модифицированного полицикла значения двух дробей-инвариантов являются инвариантами топологической классификации.

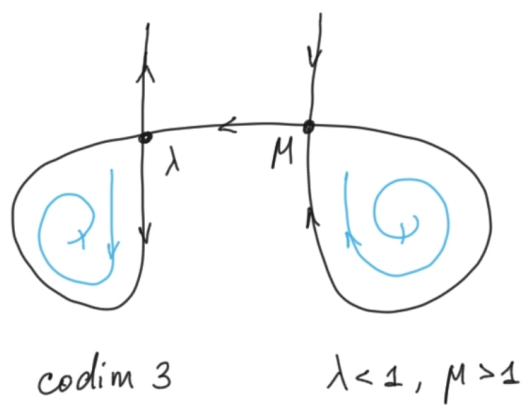
Имеем 1-параметрическое семейство такое, что каждому векторному полю соответствует два числа. База такого семейства – окрестность нуля в шестимерном пространстве (так как связок шесть). ε_0 характеризуется последней координатой: $(0; 0; 0; 0; 0; \cdot)$. Отображаемся на плоскость (два значения инвариантов).

Гомеоморфизм баз в случае топологической эквивалентности должен уважать это отображение из одномерного пространства в двумерное, то есть фактически они должны совпадать для двух семейств.

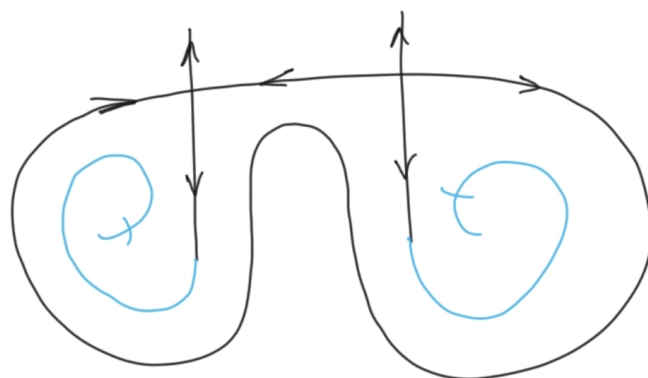
Получаем функциональный инвариант!

8.3 Вариации на тему: очки

Рассмотрим полицикл "очки".

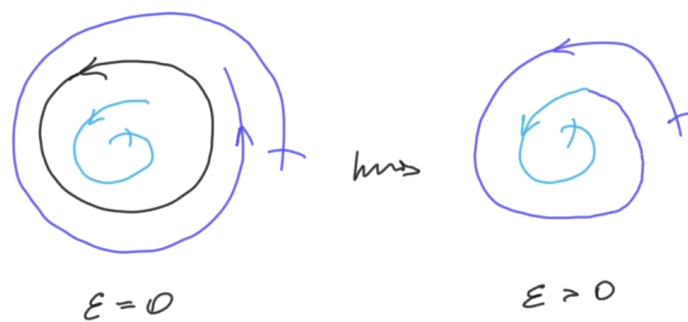


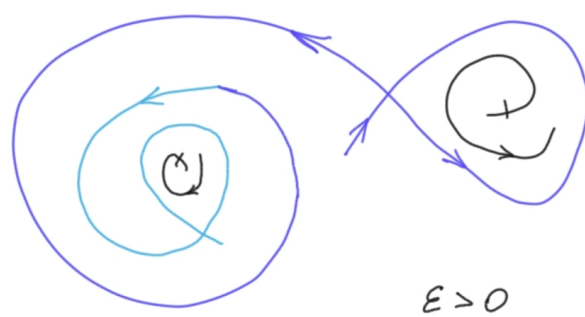
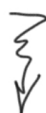
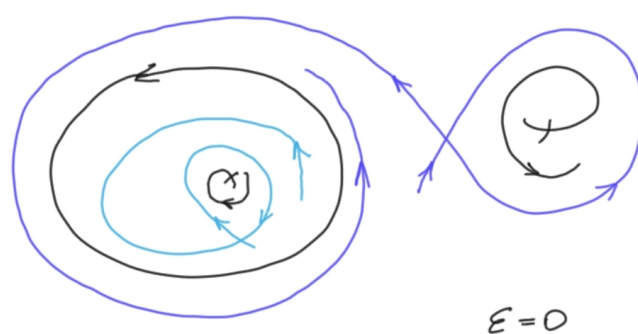
Теорема 25. $\frac{\ln \lambda}{\ln \mu}$ – топологический инвариант полицикла “очки”.



Для этого 1-параметрического семейства также возникают последовательности мелькающих связок.

8.4 Мелькающие очки





↑ Это очки (очень закрученная носовая дужка).

Возникает счетное число топологических инвариантов!

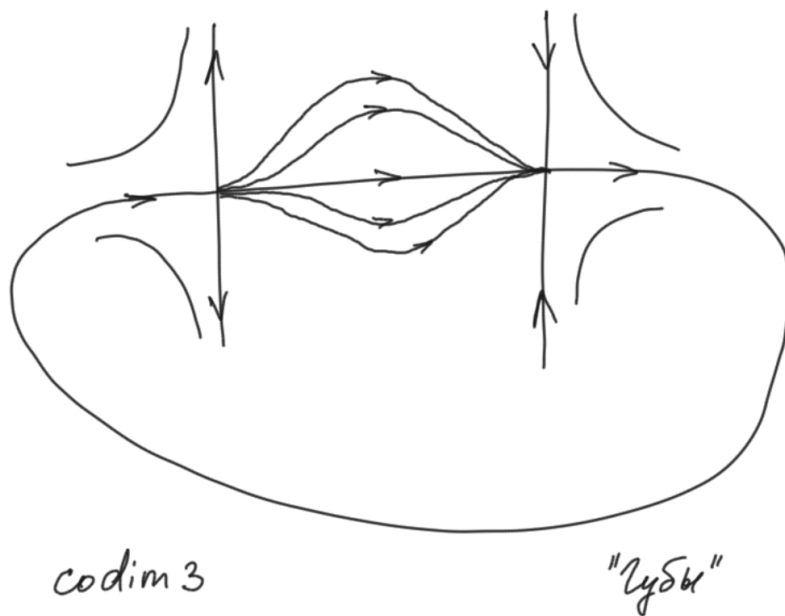
8.5 Хрупкость функциональных инвариантов

Добавление дополнительного параметра легко “убивает” функциональный инвариант. Сродни тому, что у $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ функциональный инвариант есть, а вот у $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ нет.

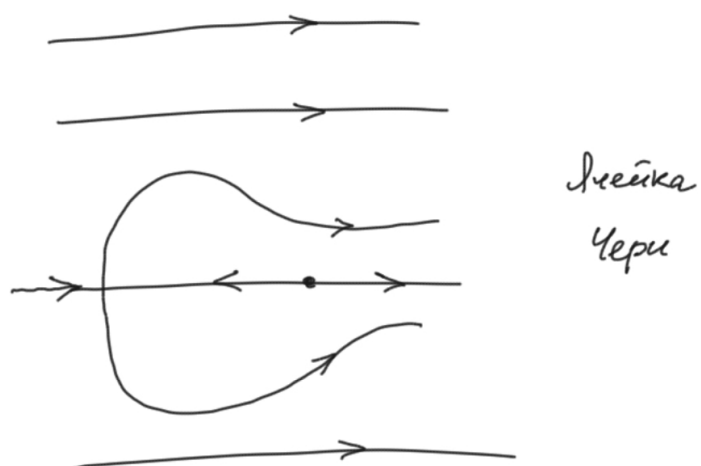
В целом функциональный инвариант обычно появляется при числе параметров меньше числа числовых инвариантов.

8.6 Зубы

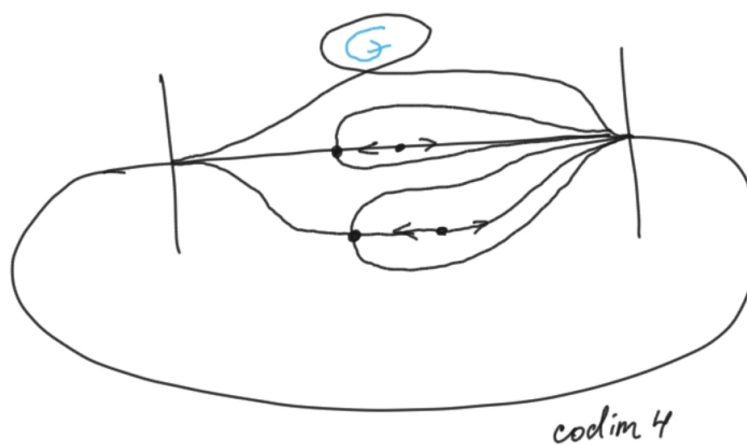
Рассмотрим ансамбль полициклов “зубы”, замечательный тем, что из него может родиться сколь угодно много предельных циклов.



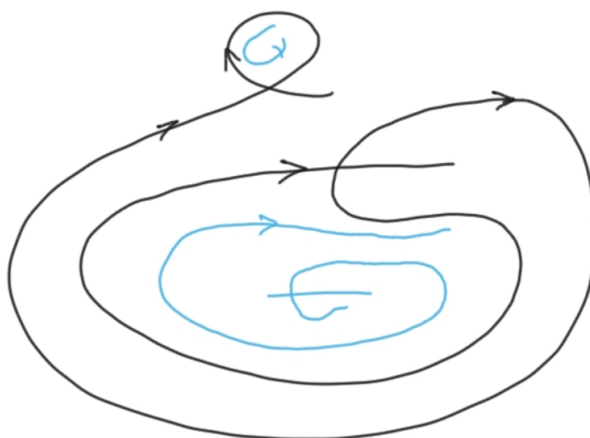
Ячейка Черри (“зуб”):



Оказывается, что в “губы” можно встроить сколь угодно много “зубов”, и тем самым получить сколь угодно много числовых инвариантов (по количеству “зубов”).



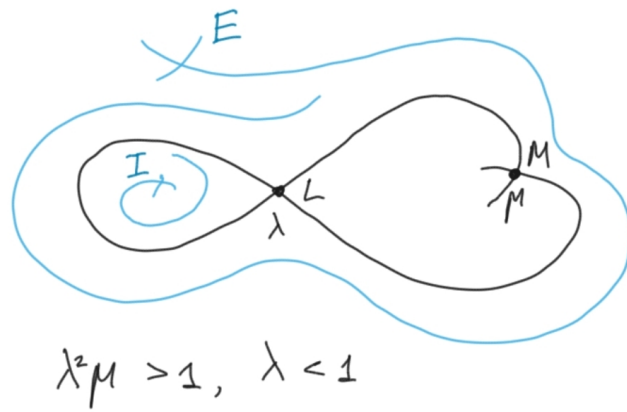
И тут снова встречаем “очки”!



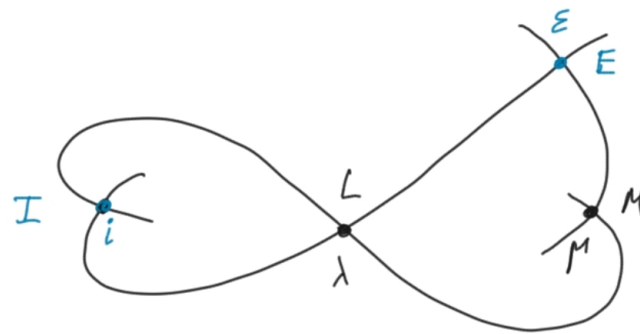
Лекция 9. Числовые и функциональные инварианты в полулокальных бифуркациях

9.1 “Динозавр”

Общий вопрос, с которого все началось: если зажать полицикл в окрестность, не будет ли “тесно” инвариантам?

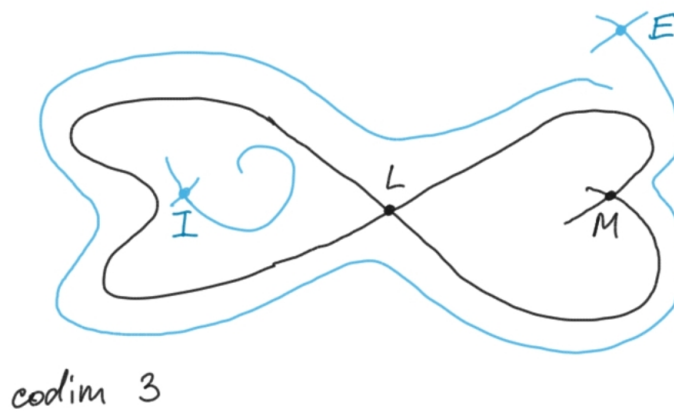


Хотим получить эту картинку возмущением, чтобы E и I соскользнули со связок.



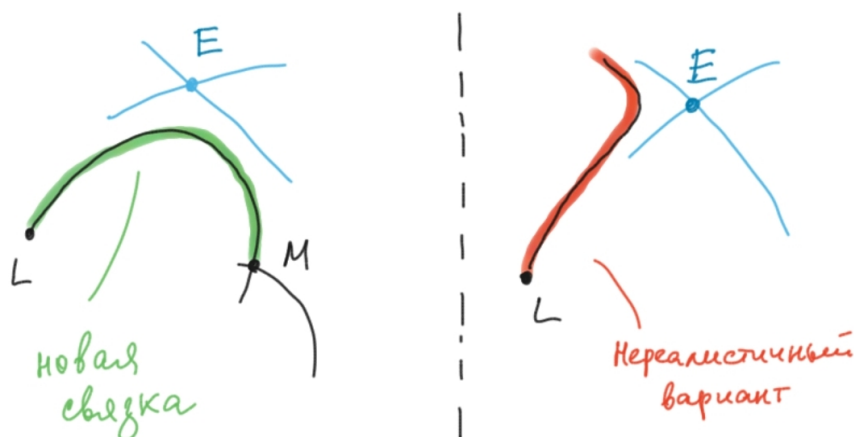
$\text{codim } 5 \quad \lambda < 1, \lambda^2 \mu > 1, \varepsilon > 1, i < 1$

малая
деформация

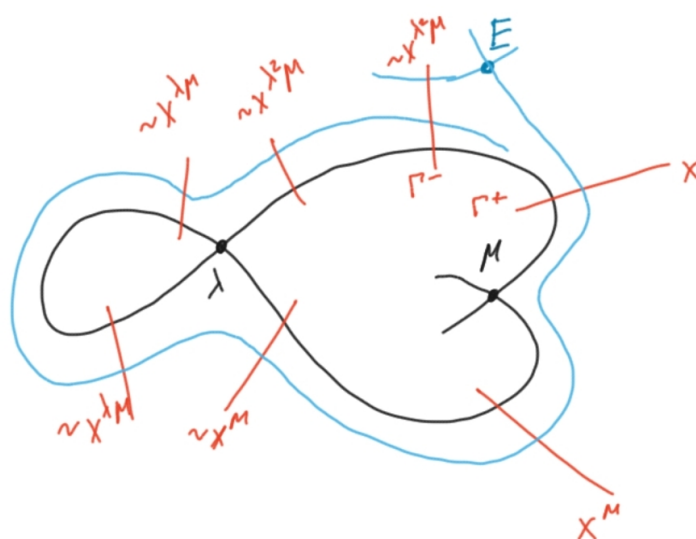


Теорема 26 (Андрей Дуков, 2025). При малом возмущении полицикла на n вершинах в типичном k -параметрическом ($k > n$) семействе на S^2 можно получить любой дочерний полицикл.

Почему седло E идет наружу, а I - внутрь?



Почему три сепаратрисы E куда-то уйдут из окрестности, а одна намотается на полицикл?

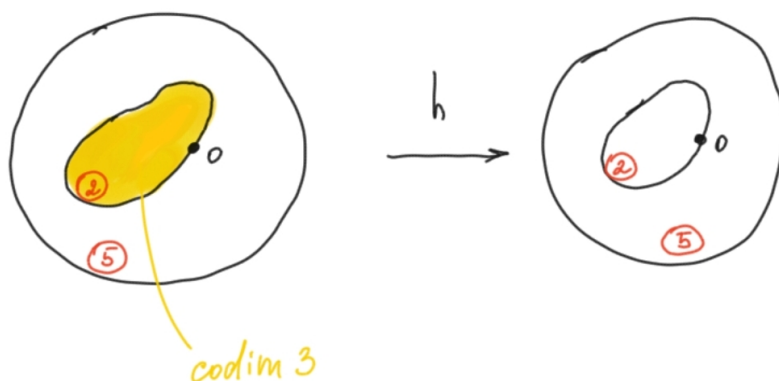


39

9.3 Анализ возмущений

Рассматриваем 5-параметрическое семейство. Нужное вырождение имеет коразмерность 3.

Пусть есть два эквивалентных семейства с "динозавром". Тогда есть гомеоморфизм баз.



Он переводит выделенную область в выделенную, так как это поля со "слезами сердца".

9.4 Инварианты

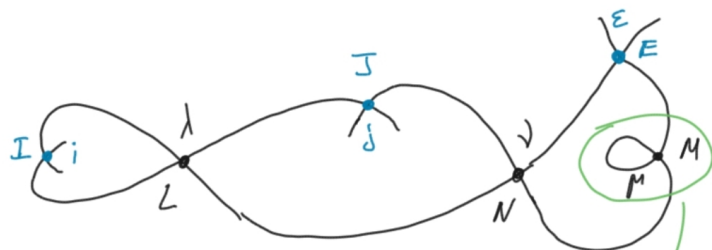
Пусть есть два D -семейства, эквивалентные в смысле отображения баз параметров.

$$\text{Тогда } \frac{\ln \lambda}{\ln \mu} = \frac{\ln \tilde{\lambda}}{\ln \tilde{\mu}}.$$

9.5 Функциональный инвариант

Основано на идее Юрия Кудряшова для порождения функционального инварианта.

Произведем модификацию:



$$\varepsilon > 1, i < 1, j < 1$$

$$\lambda j < 1, \mu j^2 \lambda^2 > 1.$$

Петля -
для деп.
параметра
слияния/
размыкания