ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Деп. в ВИНИТИ 22.09.1995, №2605-В95

УДК 517.925

В.Ш. Ройтенберг

О БИФУРКАЦИЯХ СЕПАРАТРИС, ПРЕДЕЛЬНЫХ К ДВОЙНОМУ ЦИКЛУ

ЯРОСЛАВЛЬ 1995

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе изучаются бифуркации векторных полей на двухмерной сфере S^2, удовлетворяющих следующим условиям

(C) Векторное поле X_0 имеет единственную негрубую траекторию - двойной цикл Γ а также сепаратрисы L^-_{0i} $(i=\overline{1,m};\ m\geq 2)$ ω-предельные к Γ и сепаратрисы L^+_{0j} $(j=\overline{1,n};\ n\geq 2)$ α-предельные к Γ.

Типичные однопараметрические деформации векторных полей удовлетворяющих условиям (C) и дополнительным условиям типа неравенств (X_0 имеет коразмерность один) рассматривались И.П.Мальтой и Дж.Палисом в [1]. Мы описываем типичные двухпараметрические деформации в случае когда одно из этих неравенств заменяется на равенство (X_0 имеет коразмерность два).

Итак. рассматривается двухпараметрическое семейство $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\delta_0}$ $(\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\mathbb{R}^2)$ векторных полей на сфере такое. что отображение $(x,\varepsilon)\mapsto X_\varepsilon(x)$ имеет класс гладкости

$r \geq 11$, а векторное поле X_0 удовлетворяет условиям (C). Будем также считать, что при достаточно малом $\bar{\delta} \in (0, \delta_0)$ для любого $\varepsilon \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$ существует C^r-вложение $\eta_\varepsilon : (-1,1) \to S^2$, трансверсальное полю X_ε и такое, что $\eta_0(0) \in \Gamma$, $\eta_{(\cdot)}(\cdot) \in C^r$, а функция последования по траекториям поля X_ε на трансверсали имеет вид

$$f(\cdot, \varepsilon) : y \longmapsto \varepsilon_1 + q(\varepsilon) y^2 + o(y^2) , \quad y \in (-\bar{y}, \bar{y}), \tag{1.1}$$

где y - координата на трансверсали, задаваемая отображением η_ε ,а $q(\varepsilon) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $q(0, \varepsilon_2) = 1$ при всех $\varepsilon_2 \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$.

Из [2] следует. что при достаточно малых $\bar{y}$ и $\bar{\delta}$ для любого $\varepsilon_2 \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$ на интервале $(-\bar{y}, \bar{y})$ существует единственное векторное поле $P^*(y, \varepsilon_2)\partial/\partial y$ такое, что отображение сдвига на время $t = 1$ по его траекториям совпадает с $f(\cdot, \varepsilon)$, при этом

$$P^* \in C^{r-5} , \quad P^*(y, \varepsilon_2) = y^2 + o(y^2) . \tag{1.2}$$

Поэтому при достаточно малых $\bar{y}$ и $\bar{\delta}$ для любого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]^2$ существует вложение $h_\varepsilon : (-\bar{y}, \bar{y}) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^2$ (единственное при $\varepsilon_1 = 0$) такое, что

$$h_0(\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \Gamma , \quad h_\varepsilon(y, 0) = \eta_\varepsilon(y) \quad \text{при } y \in (-\bar{y}, \bar{y}),$$

и в координатах $(y, s \bmod 1)$, задаваемых h_ε в окрестности Γ,

$$X_\varepsilon(y, s) = P^*(y, \varepsilon_2)\partial/\partial y + 1\,\partial/\partial s , \qquad \text{если } \varepsilon_1 = 0.$$

при этом $h_{(\cdot)}(\cdot) \in C^{r-5}$. Но тогда при $\varepsilon \in [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]^2$

$$X_\varepsilon(y, s) = (P^*(y, \varepsilon_2) + R^*(y, s, \varepsilon))\partial/\partial y + 1 \cdot \partial/\partial s,$$

где $R^* \in C^{r-6}$, $R^*(y,s,\varepsilon)|_{\varepsilon_1=0}=0$.

Обозначим

$$\nu(s,\varepsilon_2):=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}R^*(0,s,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon_1=0}.$$

Используя (1.1) и уравнения в вариациях, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 \nu(s,\varepsilon_2)\,ds=\partial f(0,\varepsilon)/\partial\varepsilon_1\Big|_{\varepsilon_1=0}=1.$$

Поэтому определена замена координат

$$(y,s\bmod 1)\xrightarrow{\theta_\varepsilon}\Big(z=y-\varepsilon_1\int_0^s(\nu(\tau,\varepsilon_2)-1)\,d\tau,\ s\bmod 1\Big).$$

В новых координатах

$$X_\varepsilon=(\varepsilon_1+P^*(z,\varepsilon_2)+R^{**}(z,s,\varepsilon))\,\partial/\partial z+1\,\partial/\partial s, \tag{1.3}$$

где

$$R^{**}\in C^{r-6},\ R^{**}(z,s,\varepsilon)|_{\varepsilon_1=0}=\partial R^{**}(0,s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_1|_{\varepsilon_1=0}=0. \tag{1.4}$$

Ввиду (1.2) и (1.4) мы можем переписать (1.3) в виде

$$X_\varepsilon=(\varepsilon_1+\varepsilon_1^2\alpha(s,\varepsilon)+\varepsilon_1 z\beta(s,\varepsilon)+\varepsilon_1 z^2\gamma(z,s,\varepsilon)+z^2+z^3R(z,\varepsilon_2))\frac{\partial}{\partial z}+1\cdot\frac{\partial}{\partial s},$$

где $\alpha,\beta,\gamma,R\in C^{r-9}$, α,β,γ - 1-периодичны по s.

Сделав теперь замену координат

$$(z,s\bmod 1)\xrightarrow{\zeta_\varepsilon}(x,\ s\bmod 1),$$

где

$$z=\Big(x-\frac{1}{2}\varepsilon_1\int_0^1\beta(s,\varepsilon)\,ds\Big)\exp\varepsilon_1\Big(\int_0^s\beta(\tau,\varepsilon)\,d\tau-s\int_0^1\beta(\tau,\varepsilon)\,d\tau\Big),$$

получим в новых координатах

$$X_\varepsilon = P(x,s,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial s} =$$

$$= \left(\varepsilon_1 + x^2 + x^3 R(x,\varepsilon_2) + \varepsilon_1^2 a(s,\varepsilon) + \varepsilon_1 x^2 b(x,s,\varepsilon)\right)\frac{\partial}{\partial x} + 1\cdot\frac{\partial}{\partial s}, \quad (1.5)$$

где a и b - функции класса C^{r-9} и 1-периодичны по s.

Координаты $(x, s \bmod 1)$ задаются в окрестности Γ C^{r-8}-вложениями $\tilde{h}_\varepsilon := h_\varepsilon \circ \zeta_\varepsilon^{-1} \circ \theta_\varepsilon^{-1}$. Выбрав $\bar{\delta}$ достаточно малым, мы можем считать, что при $\varepsilon \in [-\bar{\delta},\bar{\delta}]^2$ $\tilde{h}_\varepsilon$ определено на $[-\bar{y}/2, \bar{y}/2] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

В дальнейшем для сокращения выкладок мы будем пользоваться в оценках универсальной постоянной D (иначе говоря, все постоянные, конкретное значение которых несущественно, будем обозначать D).

Выбрав числа $\bar{\delta}$ и d ($0 < d < \bar{y}/4$) достаточно малыми, мы будем иметь для всех $x \in (-2d, 2d)$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0,\bar{\delta}] \times [-\bar{\delta},\bar{\delta}]$

$$D^{-1}(\varepsilon_1 + x^2) \le P(x,s,\varepsilon) \le D(\varepsilon_1 + x^2). \quad (1.6)$$

Поэтому замкнутые кривые $x = -d$ и $x = d$ являются трансверсалями для векторного поля X_ε, $\varepsilon \in [0,\bar{\delta}] \times [-\bar{\delta},\bar{\delta}]$. Сепаратрисы L^-_{0i}, $i = \overline{1,m}$ (L^+_{0j}, $j = \overline{1,n}$) пересекают трансверсаль $x = -d$ ($x = d$). Будем считать, что нумерация сепаратрис выбрана так, что соответствующие точки пересечения имеют на трансверсали циклический порядок. При достаточно малом $\bar{\delta}$ векторное поле X_ε, $\varepsilon \in [0,\bar{\delta}] \times [-\bar{\delta},\bar{\delta}]$, будет иметь сепаратрисы $L^-_i(\varepsilon)$ $i = \overline{1,m}$ ($L^+_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1,n}$) совпадающие при $\varepsilon = 0$ с L^-_{0i} (L^+_{0j}) и пересекающие трансверсаль $x = -d$ ($x = d$) в точках с s-координатами $u_k(\varepsilon)$, $k = i \bmod m$ ($v_\ell(\varepsilon)$, $\ell = j \bmod n$),

где

$$u_k(\cdot)\in C^2, \quad v_\ell(\cdot)\in C^2,$$

$$u_k(\varepsilon)<u_{k+1}(\varepsilon)\le u_{k+m}(\varepsilon)=u_k(\varepsilon)+1, \tag{1.7}$$

$$v_\ell(\varepsilon)<v_{\ell+1}(\varepsilon)\le v_{\ell+n}(\varepsilon)=v_\ell(\varepsilon)+1.$$

Для точки $s\in\mathbb{R}$ обозначим через $[s]$ класс из $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, содержащий s (= точку окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с координатой s), а через $\pi[s]$ - тот единственный элемент из $[s]$, который принадлежит $[0,1)$.

Обозначим для $i,k=\overline{1,m}$, $j,\ell=\overline{1,n}$, $\varepsilon\in[0,\bar{\delta}]\times[-\bar{\delta},\bar{\delta}]$

$$\bar{\rho}_{ijk\ell}(\varepsilon):=v_\ell(\varepsilon)-v_j(\varepsilon)-[u_k(\varepsilon)-u_i(\varepsilon)],$$

$$\rho_{ijk\ell}:=\pi[\bar{\rho}_{ijk\ell}(0)].$$

Из того, что векторное поле X_ε в $U_\varepsilon=\tilde{h}_\varepsilon((-2d,2d)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ при $\varepsilon=(0,\varepsilon_2)$, $|\varepsilon_2|<\bar{\delta}$ имеет вид

$$X_\varepsilon=(x^2+x^3R(x,\varepsilon_2))\frac{\partial}{\partial x}+1\frac{\partial}{\partial s},$$

инвариантный относительно преобразований

$$(x, s \bmod 1)\longmapsto(x,(s+\alpha)\bmod 1), \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

следует, что величины $\bar{\rho}_{ijk\ell}(0,\varepsilon_2)$, $|\varepsilon_2|\le\bar{\delta}$, не зависят от выбора d.

Будем предполагать, что

$$\rho_{1122}=0, \tag{1.8}$$

$$\rho_{ijk\ell} \neq 0 \quad \text{при} \quad (ijk\ell) \neq (1122), \ (ij) \neq (k\ell), \tag{1.9}$$

$$\tau_0 := \partial \bar{\rho}_{1122}(0)/\partial \varepsilon_2 \neq 0. \tag{1.10}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\tau_0 > 0$.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что векторные поля удовлетворяющие условиям (С) и (1.8) - (1.9), образуют в функциональном пространстве векторных полей подмногообразие коразмерности два, а двухпараметрическое семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\delta_0}$, трансверсальное при $\varepsilon = 0$ этому подмногообразию, при подходящем выборе параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ будет иметь на трансверсали к Γ функцию последования вида (1.1) и будет выполняться условие (1.10).

В силу (1.9) и равенства

$$[\bar{\rho}_{11k\ell}(0)] = [\bar{\rho}_{11ij}(0)] + [\bar{\rho}_{ijk\ell}(0)],$$

упорядоченные пары чисел (i,j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, можно расположить в виде последовательности

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots (i_N, j_N), \qquad N = m \cdot n, \tag{1.11}$$

так, что $(i_1, j_1) = (1,1)$, $(i_2, j_2) = (2,2)$,

$$0 < \rho_{11 i_k j_k} < \rho_{11 i_{k+1} j_{k+1}} \qquad (k = \overline{3, N-1}). \tag{1.12}$$

Т е о р е м а. *Бифуркационное множество семейства* $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [-\delta, \delta]^2}$ *при достаточно малом* $\delta > 0$ *имеет вид*

$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$ (рис. 1), где

($\varepsilon \in B_0$) <==> (векторное поле X_ε имеет единственную негрубую траекторию - двойной цикл).

($\varepsilon \in B_K$) <==> (векторное поле X_ε имеет двойную сепаратрису $L^-_{i_K}(\varepsilon) = L^+_{j_K}(\varepsilon)$, где (i_K, j_K) - K-й член последовательности (1.11)) при $K = \overline{1,N}$.

При этом $B_0 = \{0\} \times [-\delta, \delta]$, $B_K = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_K^p$ $(K = \overline{1,N})$,

$$B_K^p = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in [-\delta, \delta]^2 \mid \varepsilon_1 = \gamma_K^p(\varepsilon_2)\},$$

где $\gamma_K^p : [-\delta, \delta] \to (0, +\infty)$, $\gamma_K^p \in C^1$,

$$\| \gamma_K^p \|_{C^1} \to 0 \quad (p \to +\infty); \tag{1.13}$$

при всех $\varepsilon_2 \in [-\delta, \delta]$, $i = 1,2$

$$\gamma_i^{p+1}(\varepsilon_2) < \gamma_N^p(\varepsilon_2) < \gamma_{N-1}^p(\varepsilon_2) < \ldots < \gamma_3^p(\varepsilon_2) < \gamma_i^p(\varepsilon_2), \tag{1.14}$$

$$sgn\,[\gamma_2^p(\varepsilon_2) - \gamma_1^p(\varepsilon_2)] = sgn\,[\tilde{\varepsilon}_2^p - \varepsilon_2], \tag{1.15}$$

где $\tilde{\varepsilon}_2^p \in (-\delta, \delta)$,

$$\tilde{\varepsilon}^p := (\gamma_1^p(\tilde{\varepsilon}_2^p), \tilde{\varepsilon}_2^p) \to 0 \quad (p \to +\infty). \tag{1.16}$$

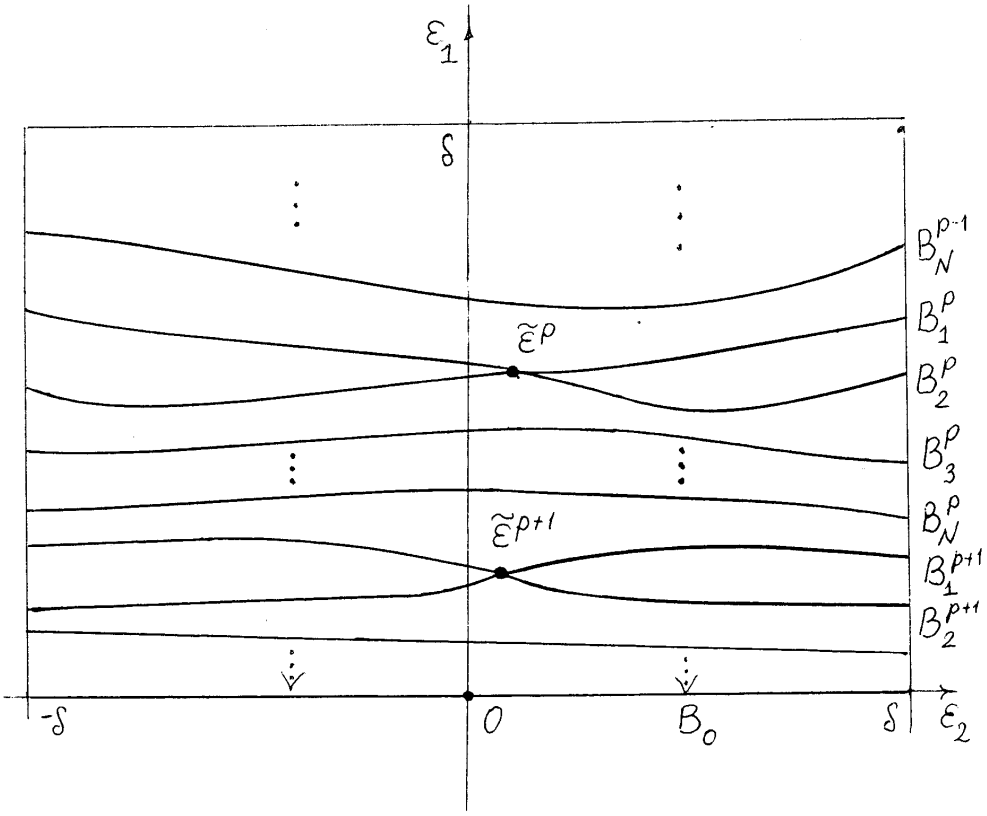

Рис. 1. Бифуркационное множество.

2. ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ СООТВЕТСТВИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ДВОЙНОГО ЦИКЛА

В силу (1.6) в кольце $U_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon((-2d, 2d) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ определено векторное поле

$$X_\varepsilon^* := 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + P^{-1}(x, s, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial s}, \quad \varepsilon \in (0, \bar{\delta}] \times [-\bar{\delta}, \bar{\delta}],$$

имеющее те же траектории, что и векторное поле $X_\varepsilon | U_\varepsilon$. Поэтому траектория векторного поля $X_\varepsilon | U_\varepsilon$, проходящая через точку с координатами $(-d, s_0)$, имеет уравнение $s = \vartheta(x, s_0, \varepsilon)$, $x \in (-2d, 2d)$, где $\vartheta(-d, s_0, \varepsilon) = s_0$, $\vartheta \in C^2$.

Обозначим $\varphi(s, \varepsilon) := \vartheta(d, s, \varepsilon)$. Функция $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ задает C^2-диффеоморфизм замкнутой трансверсали $x = -d$ на замкнутую трансверсаль $x = d$ по траекториям векторного поля X_ε. Цель этого параграфа - получение оценок для производных φ'_s, φ'_{ε_i}, $\varphi''_{s\varepsilon_i}$ $(i = 1, 2)$.

Нам понадобится следующая

Л е м м а 2.1. *При достаточно малом* $\bar{\delta}$ *для всех* $x \in [-d, d]$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \bar{\delta}] \times (-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$

$$|\vartheta'_{\varepsilon_1}(x, s, \varepsilon)| \le D \varepsilon_1^{-3/2}, \tag{2.1}$$

$$|\vartheta'_{\varepsilon_2}(x, s, \varepsilon)| \le D |\ln \varepsilon_1|. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Производная $\vartheta'_{\varepsilon_i}$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx}\mathcal{J}'_{\varepsilon_i} = A(x,s,\varepsilon)\mathcal{J}'_{\varepsilon_i} + B_i(x,s,\varepsilon),$$

где обозначено

$$A(x,s,\varepsilon) := -p^{-2}(x,\theta)\left(\varepsilon_1^2 \cdot a'_s(\theta) + \varepsilon_1 x^2 b'_s(x,\theta)\right), \tag{2.3}$$

$$B_1(x,s,\varepsilon) := -p^{-2}(x,\theta)\left(1 + \varepsilon_1\left(2a(\theta) + \varepsilon_1 a'_{\varepsilon_1}(\theta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x^2\left(b(x,\theta) + \varepsilon_1 b'_{\varepsilon_1}(x,\theta)\right)\right)\right), \tag{2.4}$$

$$B_2(x,s,\varepsilon) := -p^{-2}(x,\theta)\left(x^3 R'_{\varepsilon_2}(x,\varepsilon_2) + \varepsilon_1^2 a'_{\varepsilon_2}(\theta) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_1 x^2 b'_{\varepsilon_2}(x,\theta)\right), \tag{2.5}$$

$$\theta := (\mathcal{J}(x,s,\varepsilon),\varepsilon),$$

и начальному условию $\mathcal{J}'_{\varepsilon_i}(-d,s,\varepsilon)=0$. Поэтому

$$\mathcal{J}'_{\varepsilon_i}(x,s,\varepsilon) = \int_{-d}^{x} B_i(\xi,s,\varepsilon)\exp\int_{x}^{\xi} A(\tau,s,\varepsilon)\,d\tau\;d\xi \tag{2.6}$$

и

$$\left|\mathcal{J}'_{\varepsilon_i}(x,s,\varepsilon)\right| \le \int_{-d}^{d}\left|B_i(x,s,\varepsilon)\right|dx\;\exp\int_{-d}^{d}\left|A(x,s,\varepsilon)\right|dx. \tag{2.7}$$

Из (1.6), (2.3) - (2.5) и ограниченности функций a, b и их частных производных, считая d и $\bar{\delta}$ достаточно малыми,

получаем, что при $x \in [-d, d]$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \bar{\delta}] \times [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$

$$|A(x, s, \varepsilon)| \le D\, \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + x^2)^{-1}, \tag{2.8}$$

$$-D(\varepsilon_1 + x^2)^{-2} \le B_1(x, s, \varepsilon) \le D^{-1}(\varepsilon_1 + x^2)^{-2}, \tag{2.9}$$

$$|B_2(x, s, \varepsilon)| \le D\left(|x|^3 + \varepsilon_1(\varepsilon_1 + x^2)\right)(\varepsilon_1 + x^2)^{-2}. \tag{2.10}$$

Вычисляя соответствующие интегралы, нетрудно получить следующие оценки

$$0 < \int_{-d}^{d} (\varepsilon_1 + x^2)^{-1} dx \le D\, \varepsilon_1^{-1/2}, \tag{2.11}$$

$$D^{-1} \varepsilon_1^{-3/2} \le \int_{-d}^{d} (\varepsilon_1 + x^2)^{-2} dx \le D\, \varepsilon_1^{-3/2}, \tag{2.12}$$

$$0 < \int_{-d}^{d} |x|^3 (\varepsilon_1 + x^2)^{-2} dx \le D\, |\ln \varepsilon_1|. \tag{2.13}$$

Оценки (2.1) и (2.2) теперь следуют из (2.7) - (2.13).

Л е м м а 2.2. *При достаточно малом* $\bar{\delta}$ *для всех* $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \bar{\delta}] \times [-\bar{\delta}, \bar{\delta}]$

$$|\varphi'_{\varepsilon_1}(s, \varepsilon)| \le D\, \varepsilon_1^{-3/2}, \tag{2.14}$$

$$\varphi'_{\varepsilon_1}(s,\varepsilon) \le -D^{-1}\varepsilon_1^{-3/2}, \tag{2.15}$$

$$|\varphi'_{\varepsilon_2}(s,\varepsilon)| \le D|\ln\varepsilon_1|, \tag{2.16}$$

$$|\varphi'_s(s,\varepsilon)-1| \le D\varepsilon_1^{1/2}, \tag{2.17}$$

$$|\varphi''_{s\varepsilon_1}(s,\varepsilon)| \le D\varepsilon_1^{-1}, \tag{2.18}$$

$$|\varphi''_{s\varepsilon_2}(s,\varepsilon)| \le D\varepsilon_1^{1/2}|\ln\varepsilon_1|. \tag{2.19}$$

Доказательство. Неравенства (2.14) и (2.16) получаются из неравенств (2.1) и (2.2) при $x=d$.

Докажем (2.15). Полагая в (2.6) $x=d$, получим

$$\varphi'_{\varepsilon_1}(s,\varepsilon)=\int_{-d}^{d} B_1(\xi,s,\varepsilon)\exp\int_{d}^{\xi} A(\tau,s,\varepsilon)d\tau\, d\xi. \tag{2.20}$$

Ввиду (2.8) и (2.11)

$$\exp\int_{d}^{\xi} A(\tau,s,\varepsilon)d\tau \ge \exp\left(-\int_{-d}^{d}|A(\tau,s,\varepsilon)|d\tau\right) \ge D. \tag{2.21}$$

Оценка (2.15) теперь следует из (2.20), (2.21), (2.9) и (2.12).

Производная $\mathcal{J}_s'(x,s,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx}\mathcal{J}_s' = A(x,s,\varepsilon)\mathcal{J}_s'$$

и начальному условию $\mathcal{J}_s'(-d,s,\varepsilon)=1$. Поэтому

$$\varphi_s'(s,\varepsilon)=\mathcal{J}_s'(d,s,\varepsilon)=\exp\int_{-d}^{d}A(x,s,\varepsilon)\,dx. \qquad (2.22)$$

Поскольку $|\exp t-1|\le 3|t|$ при $|t|\le 1$, то при достаточно малом $\bar{\delta}$ оценка (2.17) следует из (2.22), (2.8) и (2.11).

Докажем неравенства (2.18) и (2.19). Из (2.22) имеем

$$\varphi_{s\varepsilon_i}''(s,\varepsilon)=\int_{-d}^{d}A_{\varepsilon_i}'(x,s,\varepsilon)\,dx\cdot\varphi_s'(s,\varepsilon)\quad(i=1,2). \qquad (2.23)$$

Найдем A_{ε_i}' $(i=1,2)$.

$$A_{\varepsilon_1}'(x,s,\varepsilon)=-P^{-2}(x,\theta)(2\varepsilon_1 a_s+\varepsilon_1^2 a_{s\varepsilon_1}''+\varepsilon_1^2 a_{ss}''\mathcal{J}_{\varepsilon_1}'+x^2(b_s'+\varepsilon_1 b_{s\varepsilon_1}''+\varepsilon_1 b_{ss}''\mathcal{J}_{\varepsilon_1}'))+$$

$$+2P^{-3}(x,\theta)(\varepsilon_1^2 a_s'+\varepsilon_1 x^2 b_s')(1+2\varepsilon_1 a+\varepsilon_1^2 a_{\varepsilon_1}'+\varepsilon_1^2 a_s'\mathcal{J}_{\varepsilon_1}'+$$

$$+x^2 b+x^2\varepsilon_1 b_{\varepsilon_1}'+\varepsilon_1 x^2 b_s'\mathcal{J}_{\varepsilon_1}')=$$

$$=-P^{-2}(x,\theta)[\varepsilon_1^{1/2}(\varepsilon_1^{3/2}a_{ss}''\mathcal{J}_{\varepsilon_1}'+2\varepsilon_1^{1/2}a_s'+\varepsilon_1^{3/2}a_{s\varepsilon_1}'')+$$

$$+\varepsilon_1^{-1/2}x^2(\varepsilon_1^{1/2}b_s'+\varepsilon_1^{3/2}b_{s\varepsilon_1}''+\varepsilon_1^{3/2}b_{ss}''\mathcal{J}_{\varepsilon_1}')]+$$

$$+2P^{-3}(x,\theta)\varepsilon_1(\varepsilon_1 a_s'+x^2 b_s')[1+\varepsilon_1^{1/2}(2\varepsilon_1^{1/2}a+\varepsilon_1^{3/2}a_{\varepsilon_1}'+$$

$$+\varepsilon_1^{3/2}a_s'\mathcal{J}_{\varepsilon_1}')+\varepsilon_1^{-1/2}x^2(\varepsilon_1^{1/2}b+\varepsilon_1^{3/2}b_{\varepsilon_1}'+\varepsilon_1^{3/2}b_s'\mathcal{J}_{\varepsilon_1}')],$$

$$A'_{\varepsilon_2}(x,s,\varepsilon)=-P^{-2}(x,\theta)[\varepsilon_1^2(a''_{s\varepsilon_2}+a''_{ss}\zeta'_{\varepsilon_2})+$$

$$+\varepsilon_1 x^2(b''_{s\varepsilon_2}+b''_{ss}\zeta'_{\varepsilon_2})]+2P^{-3}(x,\theta)(\varepsilon_1^2 a'_s+\varepsilon_1 x^2 b'_s)[x^3 R'_{\varepsilon_2}+$$

$$+\varepsilon_1^2(a'_{\varepsilon_2}+a'_s\zeta'_{\varepsilon_2})+\varepsilon_1 x^2(b'_{\varepsilon_2}+b'_s\zeta'_{\varepsilon_2})].$$

Отсюда, используя ограниченность функций a, b и их частных производных первого и второго порядков и оценки (1.6), (2.1), (2.2) получаем

$$|A'_{\varepsilon_1}(x,s,\varepsilon)|\le D(\varepsilon_1+x^2)^{-2}(\varepsilon_1^{1/2}+\varepsilon_1^{-1/2}x^2)+$$

$$+D\varepsilon_1(\varepsilon_1+x^2)^{-2}(1+\varepsilon_1^{1/2}+\varepsilon_1^{-1/2}x^2)=$$

$$=D\varepsilon_1^{-1/2}(\varepsilon_1+x^2)^{-1}+D\varepsilon_1(\varepsilon_1+x^2)^{-2}+D\varepsilon_1^{1/2}(\varepsilon_1+x^2)^{-1}, \qquad (2.24)$$

$$|A'_{\varepsilon_2}(x,s,\varepsilon)|\le D\varepsilon_1|\ln\varepsilon_1|(\varepsilon_1+x^2)^{-1}+$$

$$+D\varepsilon_1[|x|^3+\varepsilon_1|\ln\varepsilon_1|(\varepsilon_1+x^2)](\varepsilon_1+x^2)^{-2}=$$

$$=D\varepsilon_1|\ln\varepsilon_1|(\varepsilon_1+x^2)^{-1}+D\varepsilon_1|x|^3(\varepsilon_1+x^2)^{-2}. \qquad (2.25)$$

Теперь оценки (2.18) и (2.19) очевидно следуют из (2.23) - (2.25), (2.11) - (2.13) и (2.17).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Введем функции

$$\bar{R}_{ij}(\varepsilon) := v_j(\varepsilon) - v_1(\varepsilon) - \left(\varphi(u_i(\varepsilon),\varepsilon) - \varphi(u_1(\varepsilon),\varepsilon)\right);$$

$$R_{ij}(\varepsilon) := \pi\left[\bar{R}_{ij}(\varepsilon)\right] \qquad (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n});$$

$$F_k^p(\varepsilon) := v_k(\varepsilon) - \varphi(u_k(\varepsilon),\varepsilon) + p \qquad (k=1,2;\ p\in\mathbb{Z});$$

$$F_k^p(\varepsilon) := F_1^p(\varepsilon) + R_{i_k j_k}(\varepsilon) \qquad (k=\overline{3,N};\ p\in\mathbb{Z}).$$

Из равенства

$$\bar{R}_{ij}(\varepsilon) = \bar{\rho}_{11ij}(\varepsilon) + \left(\varphi_s'(\bar{u},\varepsilon)-1\right)\left(u_i(\varepsilon)-u_1(\varepsilon)\right),\quad \bar{u}\in\left(u_1(\varepsilon),u_i(\varepsilon)\right), \tag{3.1}$$

из ограниченности функций u_ℓ ($\ell=\overline{1,m}$), непрерывности функций $\bar{\rho}_{11ij}$ и $\pi|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, из (1.12), (1.8) и оценки (2.17) следует, что $\delta\in(0,\bar{\delta})$ можно выбрать столь малым, что при $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$

$$0 < R_{i_k j_k}(\varepsilon) < R_{i_{k+1} j_{k+1}}(\varepsilon) < 1 \qquad (k=\overline{3,N-1}),$$

$$|\bar{R}_{22}(\varepsilon)| < \min\left\{R_{i_3 j_3}(\varepsilon),\ 1-R_{i_N j_N}(\varepsilon)\right\},$$

и потому для $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$, $k=\overline{3,N-1}$, $p\in\mathbb{Z}$

$$F_1^p(\varepsilon) < F_k^p(\varepsilon) < F_{k+1}^p(\varepsilon) < F_1^{p+1}(\varepsilon),$$

$$F_N^{p-1}(\varepsilon) < F_2^p(\varepsilon) < F_3^p(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Ясно, что

$$F_k^p(\varepsilon)=v_\alpha(\varepsilon)-\varphi(u_{i_k}(\varepsilon),\varepsilon)+p \qquad (k=\overline{1,N}), \tag{3.3}$$

где $\alpha=j_k$ или $\alpha=j_k+n$. Поэтому при $k=\overline{1,N}$, $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$

$$L^-_{i_k}(\varepsilon)=L^+_{j_k}(\varepsilon) \iff \exists\, p\in\mathbb{Z}\ \ F_k^p(\varepsilon)=0.$$

Из (3.3), (2.15) - (2.17) и ограниченности частных производных функций u_{i_k}, v_{j_k} следует, что при всех $k=\overline{1,N}$, $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$

$$\partial F_k^p(\varepsilon)/\partial\varepsilon_1 \geq D^{-1}\varepsilon_1^{-3/2}>0, \tag{3.4}$$

$$|\partial F_k^p(\varepsilon)/\partial\varepsilon_2|\leq D\,|\ln\varepsilon_1|. \tag{3.5}$$

Используя (3.4), получаем

$$F_k^p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=F_k^p(\delta,\varepsilon_2)+\int_\delta^{\varepsilon_1}\partial F_k^p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)/\partial\varepsilon_1\,d\varepsilon_1\leq D-D^{-1}\varepsilon_1^{-1/2}.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon_1\to+0}F_k^p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=-\infty\ ,\quad \partial F_k^p(\varepsilon)/\partial\varepsilon_1>0. \tag{3.6}$$

Из определения F_k^p и из (3.6) следует, что для каждого $k=\overline{1,N}$ существует число $p_0\in\mathbb{Z}$ такое, что уравнение $F_k^p(\varepsilon_1,0)=0$, $\varepsilon_1\in(0,\delta)$, при $p\leq p_0$ не имеет решений, а при $p>p_0$ имеет единственное решение $\varepsilon_1=\delta_k^p$, причем $\delta_k^p\downarrow 0$ при $p\to+\infty$. Используя этот факт и теорему о неявной функции, а также неравенства (3.2), аналогично [3, с. 71-72] доказывается, что найдутся число $p_*\in\mathbb{Z}$ и C^1-функция

$$\gamma_k^p : (-\delta,\delta) \to (0,\bar{\delta}) \qquad (k=\overline{1,N},\ p\in\mathbb{N}),$$

удовлетворяющие условию $\gamma_k^p(0)=\delta_k^{p+p_*}$, и такие, что множество решений уравнения $F_k^{p+p_*}(\varepsilon)=0$, $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$, при $p\le 0$ пусто, а при $p\ge 1$ совпадает с множеством

$$\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta) \mid \varepsilon_1=\gamma_k^p(\varepsilon_2)\};$$

при этом

$$(\gamma_k^p)'(\varepsilon_2)=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}F_k^{p+p_*}(\varepsilon)\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}F_k^{p+p_*}(\varepsilon)\right]^{-1}\Big|_{\varepsilon_1=\gamma_k^p(\varepsilon_2)}, \tag{3.7}$$

$$\forall\,\varepsilon_2\in(-\delta,\delta)\quad \gamma_k^p(\varepsilon_2)\downarrow 0 \quad (p\to+\infty), \tag{3.8}$$

и выполняется неравенство (1.14).

Из (3.7) и (1.14) по теореме Дини [4, с. 378] получаем, что

$$\gamma_k^p(\varepsilon_2)\rightrightarrows 0 \ \text{ при } \varepsilon_2\in(-\delta,\delta),\ p\to+\infty. \tag{3.9}$$

Из (3.7) и из оценок (3.4), (3.5) следует, что при $\varepsilon_2\in(-\delta,\delta)$, $k=\overline{1,N}$

$$|(\gamma_k^p)'(\varepsilon_2)|\le D\,\varepsilon_1^{3/2}\,|\ln\varepsilon_1|\Big|_{\varepsilon_1=\gamma_k^p(\varepsilon_2)}. \tag{3.10}$$

Теперь (1.13) вытекает из (3.9) и (3.10).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать

формулы (1.15) и (1.16).

Рассмотрим функцию

$$R_p(\varepsilon_2) := \bar{R}_{22}(\gamma_1^p(\varepsilon_2), \varepsilon_2), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Представим ее производную в виде

$$R_p'(\varepsilon_2) = v'_{2\varepsilon_2}(\varepsilon) - v'_{1\varepsilon_2}(\varepsilon) + [v'_{2\varepsilon_1}(\varepsilon) - v'_{1\varepsilon_1}(\varepsilon)](\gamma_1^p)'(\varepsilon_2) -$$

$$-[\varphi_S'(u_2(\varepsilon),\varepsilon)u'_{2\varepsilon_2}(\varepsilon) - \varphi_S'(u_1(\varepsilon),\varepsilon)u'_{1\varepsilon_2}(\varepsilon)] - [\varphi_S'(u_2(\varepsilon),\varepsilon)u'_{2\varepsilon_1}(\varepsilon) - \varphi_S'(u_1(\varepsilon),\varepsilon)u'_{1\varepsilon_1}(\varepsilon)] \times$$

$$\times(\gamma_1^p)'(\varepsilon_2) - [\varphi'_{\varepsilon_2}(u_2(\varepsilon),\varepsilon) - \varphi'_{\varepsilon_2}(u_1(\varepsilon),\varepsilon)] - [\varphi'_{\varepsilon_1}(u_2(\varepsilon),\varepsilon) - \varphi'_{\varepsilon_1}(u_1(\varepsilon),\varepsilon)](\gamma_1^p)'(\varepsilon_2) =$$

$$= \partial\bar{\rho}_{1122}(\varepsilon)/\partial\varepsilon_2 + [v'_{2\varepsilon_1}(\varepsilon) - v'_{1\varepsilon_1}(\varepsilon)](\gamma_1^p)'(\varepsilon_2) -$$

$$-[\varphi_S'(u_2(\varepsilon),\varepsilon) - 1]u'_{2\varepsilon_2}(\varepsilon) - [\varphi_S'(u_1(\varepsilon),\varepsilon) - 1]u'_{1\varepsilon_2}(\varepsilon) - [\varphi_S'(u_2(\varepsilon),\varepsilon)u'_{2\varepsilon_1}(\varepsilon) -$$

$$-\varphi_S'(u_1(\varepsilon),\varepsilon)u'_{1\varepsilon_1}(\varepsilon)](\gamma_1^p)'(\varepsilon_2) - \varphi''_{S\varepsilon_2}(\bar{u},\varepsilon)[u_2(\varepsilon) - u_1(\varepsilon)] - \varphi''_{S\varepsilon_1}(\bar{\bar{u}},\varepsilon)[u_2(\varepsilon) - u_1(\varepsilon)](\gamma_1^p)'(\varepsilon_2),$$

где $\varepsilon = (\gamma_1^p(\varepsilon_2), \varepsilon_2)$, а $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$ - некоторые числа. Теперь из (1.10), из непрерывности $\partial\bar{\rho}_{1122}/\partial\varepsilon_2$, из оценок (2.17) - (2.19) и (3.10), а также из ограниченности функций u_i, v_i $(i=1,2)$ и их первых производных следует, что δ можно считать столь малым, что

$$R_p'(\varepsilon_2) \geq \tau_0/2 > 0 \quad \text{для всех } \varepsilon_2 \in (-\delta,\delta),\ p \in \mathbb{N}. \qquad (3.11)$$

Из равенства (3.1), из непрерывной дифференцируемости функции $\bar{\rho}_{1122}$, ограниченности u_j $(j=1,2)$ и из оценки (2.17) получаем при всех $p \in \mathbb{N}$

$$|R_p(0)| \le D\sqrt{\gamma_1^p(0)}\,. \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) и (3.8) вытекает, что найдется такое число $\hat{p}$, что при $p \ge \hat{p}$

$$R_p(-\delta) < 0\,, \quad R_p(\delta) > 0. \tag{3.13}$$

Вследствие (3.11) и (3.13), для каждого натурального числа $p \ge \hat{p}$ найдется такое $\tilde{\varepsilon}_2^p \in (-\delta, \delta)$, что

$$\operatorname{sgn} R_p(\varepsilon_2) = \operatorname{sgn}[\varepsilon_2 - \tilde{\varepsilon}_2^p] \qquad \varepsilon_2 \in (-\delta, \delta)\,. \tag{3.14}$$

Покажем, что отсюда следует (1.15). Предположим, что (1.15) неверно при некотором $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^* \in (\tilde{\varepsilon}_2^p, \delta)$, то есть $\gamma_2^p(\varepsilon_2^*) \ge \gamma_1^p(\varepsilon_2^*)$. В силу (3.14),

$$F_2^p(\gamma_1^p(\varepsilon_2^*), \varepsilon_2^*) = R_p(\varepsilon_2^*) > 0\,. \tag{3.15}$$

Из (3.6) и (3.15) вытекает, что существует такое число ε_1^*, что $0 < \varepsilon_1^* < \gamma_1^p(\varepsilon_2^*) \le \gamma_2^p(\varepsilon_2^*)$ и $F_2^p(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) = 0$ в противоречие с тем, что $\varepsilon_1 = \gamma_2^p(\varepsilon_2)$ - единственное решение уравнения $F_2^p(\varepsilon_1, \varepsilon_2^*) = 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$. Тем самым, (1.15) верно при $\varepsilon_2 \in (\tilde{\varepsilon}_2^p, \delta)$. Аналогично доказывается, что (1.15) верно при $\varepsilon_2 \in (-\delta, \tilde{\varepsilon}_2^p)$. Но тогда (1.15) верно и при $\varepsilon_2 = 0$.

Докажем (1.16). Ввиду (3.9), $\gamma_1^p(\tilde{\varepsilon}_2^p) \to 0$ при $p \to +\infty$. Аналогично (3.13) получаем, что $\forall \nu > 0\ \exists p'\ \forall p \ge p'$ $R_p(-\nu) R_p(\nu) < 0$, и потому $\tilde{\varepsilon}_2^p \in (-\nu, \nu)$. Таким образом, и $\tilde{\varepsilon}_2^p \to 0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malta I.P.,Palis J. Families of vector fields with finite modulus of stability // Lect. Notes Math., 1981, 898, 212 - 229.
2. Newhause S., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorfisms // Publ. math. Inst. hautes etud. sci., 1983, 57, 5 - 71.
3. Ройтенберг В.Ш. О глобальных бифуркациях в типичных двухпараметрических семействах на сфере S^2 // Методы качественной теории и теории бифуркаций : Межвуз. тематич. сб. научн. тр. / Под ред. Л.П. Шильникова; Нижегор. гос. ун-т. Нижний Новгород, 1990, с. 61 - 73.
4. Зорич В.А. Математический анализ Ч. II - М.: Наука, 1984.