

Глобальная теория бифуркаций на плоскости

Ю. Ильяшенко

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Чем занимается теория бифуркаций?

-Векторными полями, зависящими от параметра. При некритических значениях параметра фазовый портрет векторного поля меняется плавно; при критических значениях параметра - скачкообразно. Эти скачки и изучает теория бифуркаций.

Пример: $\dot{z} = (\varepsilon + i)z$.

При $\varepsilon < 0$ фазовые кривые - спирали, наматывающиеся на ноль; при $\varepsilon = 0$ - окружности, при $\varepsilon > 0$ - спирали, разматывающиеся от нуля.

Эти картинки доступны студентам второго курса. Что будет, если ко всем этим уравнениям добавить старшие члены, гладкие по параметру?

В типичном семействе (если возмущенная система при $\varepsilon = 0$ устойчива) при $\varepsilon > 0$ возникнет предельный цикл.

Это - знаменитая бифуркация Андронова - Хопфа, которая наблюдается не только на плоскости, но и в многомерном и в бесконечномерном пространстве. В 60-е годы ей была посвящена целая книга Марсдена и Мак Кракен.

Полулокальные бифуркации

Эти бифуркации происходят в малой окрестности сепаратрисных многоугольников - полициклов. Важным примером является бифуркация петли сепаратрисы. В малой окрестности петли по одну сторону от критического значения параметра 0 рождается предельный цикл, а по другую не происходит ничего интересного. Но если выйти за пределы малой окрестности петли, можно увидеть внутри петли седло, сепаратриса которого при сколь угодно малом значении параметра образует связку с разомкнувшейся сепаратрисой основного седла. Такая последовательность называется *мелькающими сепаратрисными связками, МСС*. Соответствующая *бифуркационная диаграмма - БД* - точка ноль и сходящаяся к ней последовательность.

Определение

БД - это множество значений параметров семейства, которым соответствуют структурно неустойчивые векторные поля.

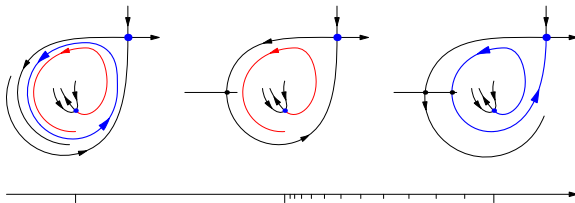


Рис. 1: Бифуркация петли сепаратрисы: рождение цикла и мелькающих сепаратрисных связок; бифуркационная диаграмма в виде последовательности вместе с ее пределом

Основные вопросы

A. Верно ли, что типичные конечнопараметрические семейства структурно устойчивы?

B. Кто бифурцирует?

C. Классификация

D. Насколько полулокальные бифуркации проще глобальных?

Слабая, сильная, умеренная и sing -эквивалентность

Определение

Глокальное семейство векторных полей (в этом докладе) - это векторное поле $V = \{v_\varepsilon\}$ на $(\mathbb{R}^k, 0) \times S^2$, касательное к слоям. Здесь $\varepsilon \in (\mathbb{R}^k, 0)$, $x \in S^2$; локальность по параметру, глобальность по фазовой переменной.

Определение

Два глокальных семейства $V = \{v_\varepsilon\}$ и $W = \{w_\delta\}$ эквивалентны, если существует отображение

$$H : (\mathbb{R}^k, 0) \times S^2 \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0) \times S^2, (\varepsilon, x) \mapsto (h(\varepsilon), H_\varepsilon(x)),$$

где $h : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ - росток в нуле гомеоморфизма,

Определение

(продолжение)

$H_\varepsilon : S^2 \rightarrow S^2$ -гомеоморфизм, сопрягающий векторные поля v_ε и $w_{h(\varepsilon)}$, то есть переводящий фазовые кривые первого поля в фазовые кривые второго.

Если никаких больше требований на H_ε не наложено, эквивалентность называется *слабой*;

если H_ε непрерывно на всем тотальном пространстве, эквивалентность называется *сильной*;

если H_ε непрерывно по (x, ε) на множестве $(Singv_0 \cup Perv_0 \cup Sepv_0) \times \{0\}$, эквивалентность называется *sing- эквивалентностью*.

Существует еще *умеренная эквивалентность*, промежуточная между sing и сильной; мы отметим только, что она непрерывна на подмножестве слоя над нулем, более широким, чем $(Singv_0 \cup Perv_0 \cup Sepv_0) \times \{0\}$.

Структурно неустойчивые семейства

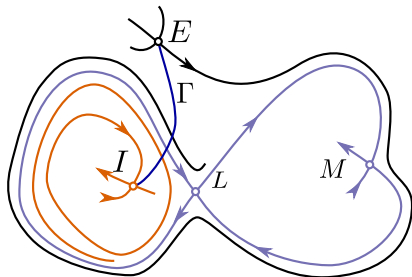


Рис. 2: Невозмущенное векторное поле класса TH

Типичное возмущение такого векторного поля - семейство класса TH , само поле - тоже класса TH .

Теорема

(И, Кудряшов, Щуров) Если два семейства класса ТН с характеристическими числами λ и μ , удовлетворяющими неравенствам $\lambda < 1, \lambda^2\mu > 1$ *sing*-эквивалентны, то

$$\frac{\ln \lambda}{\ln \mu} = \frac{\ln \tilde{\lambda}}{\ln \tilde{\mu}}. \quad (1)$$

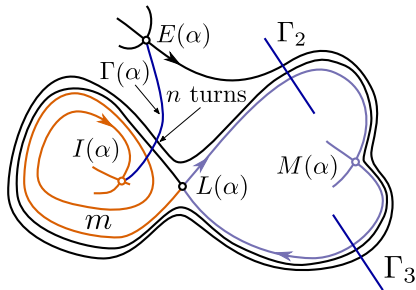


Рис. 3: Возмущенное векторное поле класса TH

Рассмотрим семейство класса TH и его однопараметрическое подсемейство с параметром α , фазовый портрет которого изображен на рисунке 3.

В этом однопараметрическом семействе возникают две последовательности МСС; связки из обеих последовательностей изображены на рисунке 3. Одна последовательность - это связки между L и I , другая - между E и L .

Значения параметра, соответствующие первой последовательности имеют вид:

$$\alpha = i_m, \ln(-\ln i_m) = -m \ln \lambda + O(1),$$

второй -

$$\alpha = e_n, \ln(-\ln e_n) = n \ln(\lambda^2 \mu) + O(1).$$

Если два TH -семейства эквивалентны, то существует гомеоморфизм $\tilde{h} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, сопрягающий эту пару последовательностей с парой

$$\tilde{\alpha} = \tilde{i}_m, \quad \ln(-\ln \tilde{i}_m) = -m \ln \tilde{\lambda} + O(1),$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{e}_n, \quad \ln(-\ln \tilde{e}_n) = n \ln(\tilde{\lambda}^2 \tilde{\mu}) + O(1).$$

Относительные плотности этих двух “почти арифметических прогрессий” совпадают:

$$\frac{\ln \lambda}{\ln(\lambda^2 \mu)} = \frac{\ln \tilde{\lambda}}{\ln \tilde{\lambda}^2 \tilde{\mu}}.$$

Отсюда следует (1).

Правда ли, что полулокальные бифуркации типичных гиперболических полициклов структурно устойчивы?

НЕТ (Дуков и И, in preparation). Рассмотрим векторное поле с полициклом γ_5 , изображенным на рисунке 4.

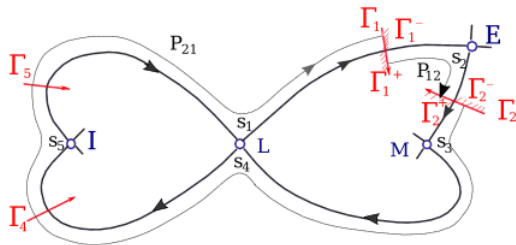


Рис. 4: Невозмущенный полицикл γ_5

Общая теорема о перезамыкании сепаратрис гиперболического полицикла (Дуков, in preparation) плюс анализ условий: $\lambda < 1, \lambda^2 \mu > 1, i < 1, \varepsilon > 1$ позволяет возмутить это поле как показано на рисунке 5:

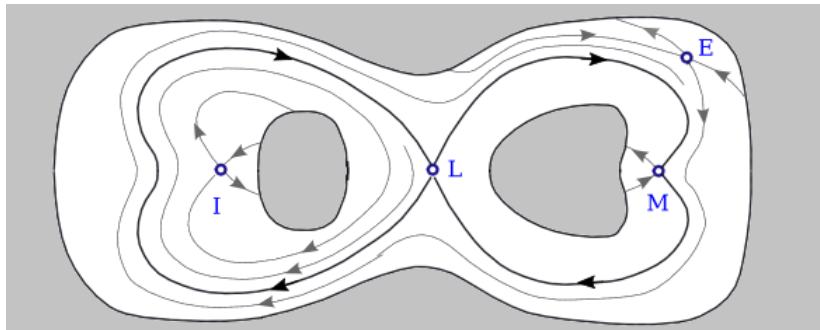


Рис. 5: Возмущенный полицикл γ_5

Пусть два семейства с гиперболическим полициклом, гомеоморфным γ_5 , sing-эквивалентны.

Тогда их специальные подсемейства тоже (слабо) эквивалентны. Однако к ним можно применить теорему 1 .
Отношение

$$\varphi = \frac{\ln \lambda}{\ln \mu}$$

является инвариантом в следующем смысле: если $(\varepsilon, \delta), (\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta})$ - параметры двух специальных подсемейств, и $B, \tilde{B}$ - их базы, и $\tilde{h}$ - гомеоморфизм между ними, то

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \tilde{h},$$

где $\tilde{\varphi}$ - функция, аналогичная φ для второго семейства. Это соотношение еще не дает инварианта. Однако

$$(0, 0) \in \partial B, (0, 0) \in \partial \tilde{B}$$

Следовательно, $\varphi(0, 0) = \tilde{\varphi}(0, 0)$. А это уже инвариант!

Кто бифурцирует?

- Носитель бифуркации. По замыслу Арнольда, носитель бифуркации - это такое подмножество фазового портрета вырожденного векторного поля, в окрестности которого бифуркация происходит.

Например, если поле имеет петлю сепаратрисы или полуустойчивый цикл и не имеет других вырождений, то носитель - эта самая петля или цикл. Аналогичное множество хочется определить для сколь угодно вырожденного поля.

Формальное определение, данное Арнольдом, не выполняет своего предназначения. Вместо носителя был определен *большой носитель бифуркации*.

Определение

(аксиоматическое) Большой носитель бифуркации в глобальном семействе V , $LBS(V)$ - это такое замкнутое v_0 -инвариантное подмножество сферы, которое обладает следующим свойством: пусть V и W - два глобальных семейства, и пусть поля v_0 и w_0 орбитально топологически эквивалентны, H_0 - сопрягающий гомеоморфизм; пусть в сколь угодно малых окрестностях множеств $LBS(V)$ и $LBS(W)$ семейства V и W (умеренно) эквивалентны, причем отображение эквивалентности совпадает с H_0 при нулевом значении параметра. Тогда семейства V и W слабо эквивалентны.

Remark

Можно положить $LBS(V) = S^2$. Такой большой носитель тривиальным образом удовлетворяет аксиоматическому определению. Но интересно описать меньшее множество, которое реально упростит исследование бифуркаций.

Remark

Носитель бифуркации аксиоматическому определению не удовлетворяет. Пример - полуустойчивый цикл с мелькающими сепаратрисными связками (И, Солодовников, 19).

Формальное определение большого носителя, как и определение умеренной эквивалентности, приведено в конце доклада. Оно громоздко и пропущено сейчас для экономии времени.

Теорема

(Гончарук, И) Определенный явно большой носитель бифуркации определяет аксиоматическому определению.

Эта теорема составляет предмет большой статьи, поданной в печать. Методы ее доказательства недалеко выходят за рамки тех геометрических методов, которыми доказывалась теорема Пуанкаре - Бендиксона и которые затем были развиты в школе Андронова.

Никогда раньше я не предполагал, что геометрическая теория дифференциальных уравнений так богата.

Пример. Рассмотрим несколько модифицированное векторное поле класса TH , см. рис. 6.

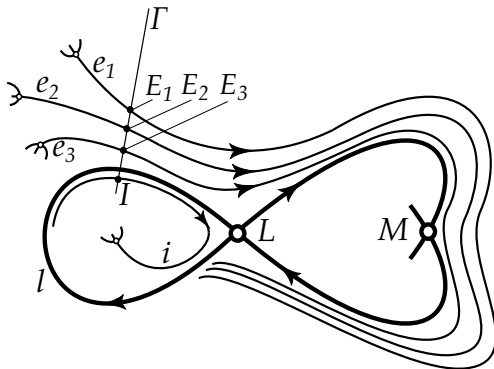


Рис. 6: Полицикл “слезы сердца” с дополнительными внешними седлами

Большой носитель бифуркации этого поля в типичном многопараметрическом семействе - это те и только те фазовые кривые, которые изображены на рисунке, за исключением “хвостиков сепаратрис”.

Еще структурно неустойчивые семейства (по работам Гончарук, Кудряшова и Солодовникова)

Теорема

(Гончарук, Кудряшов) Для любого N существует типичное 3-параметрическое семейство, sing -классификация которого имеет не менее N числовых инвариантов.

Это семейство - возмущение поля, изображенного на предыдущем рисунке. Его инварианты - отношения отрезков трансверсали (длины отрезков считаются в специальной карте, продиктованной динамикой) на которые ее делят сепаратрисы внешних седел (см. предыдущий рисунок)

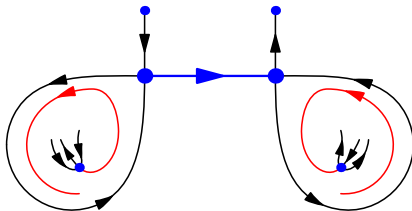


Рис. 7: Связка полициклов "очки"

Теорема

(Гончарук, Кудряшов, Солодовников) Отношение логарифмов характеристических чисел седел - инвариант *sing*-классификации 3-параметрических семейств, возмущающих связку "очки".

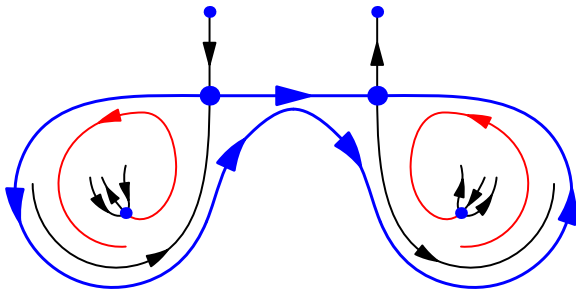


Рис. 8: Специальное возмущение связки полициклов “очки”

Объяснение. В однопараметрическом семействе, показанном на рисунке 8, возникают две последовательности МСС, как в семействе ТН.

Очки, разрезанные полуустойчивым циклом

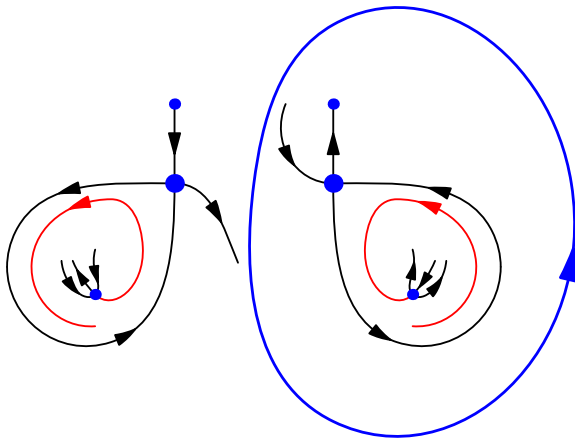


Рис. 9: Очки, разрезанные полуустойчивым циклом

При возмущении поля, показанного на предыдущем рисунке, полуустойчивый цикл исчезает, и между седлами с петлей сепаратрисы возникают МСС. Другими словами, при таком возмущении возникает счетное число очков, и у каждого – свой числовой инвариант. Эти очки показаны на следующем рисунке.

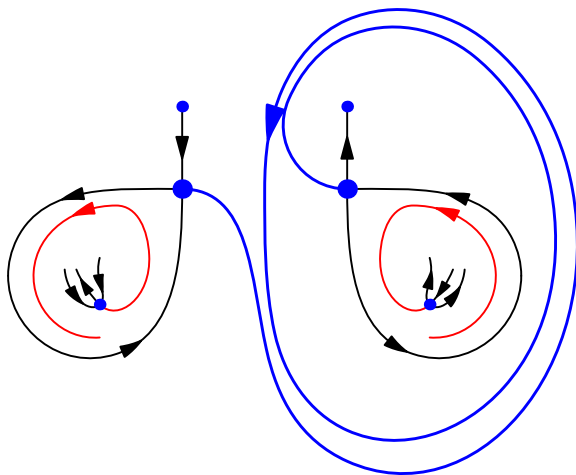


Рис. 10: Мелькающие очки

"Губы" и "зубы"

Ансамбль коразмерности 3 "губы" был открыт А.Котовой в 91г. Этот ансамбль возникает в типичных семействах размерности 3.

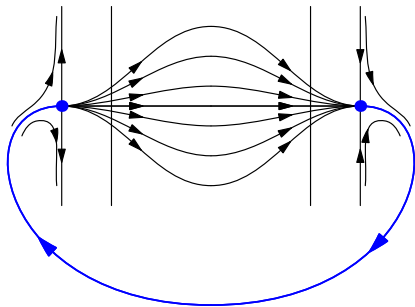


Рис. 11: Ансамбль "губы"

При бифуркации такого векторного поля может родиться сразу сколь угодно много предельных циклов.

Следующий ансамбль без петли сепаратрисы тоже возникает в типичных семействах размерности 3.

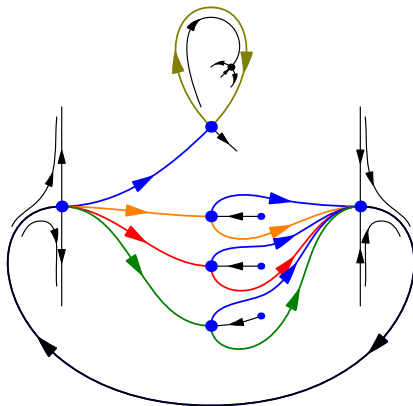


Рис. 12: Ансамбль “зубы”

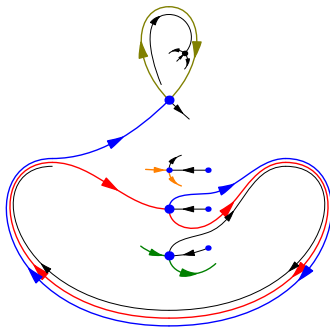


Рис. 13: Возмущенные зубы или мелькающие очки

Теорема

(Кудряшов, Гончарук) Для любого $n > 4$ существует векторное поле коразмерности 4, деформация которого в типичном семействе с любым числом параметров меньше n и больше 4 имеет функциональный инвариант.

Теорема

(Кудряшов) Существует векторное поле коразмерности 12, типичное возмущение которого с любым числом параметров больше 11 имеет функциональный инвариант, зависящий только от поля, а не от возмущения.

Corrolary

Для такого поля нет версальных деформаций.

В заключение приведем пропущенные выше определения.

Умеренная эквивалентность

Определение

Два глокальных семейства V и W умеренно эквивалентны, если они слабо эквивалентны, и сопрягающее отображение H непрерывно по (x, ε) на множестве

$$S(v_0) \cup \partial((\overline{PerV} \cup \overline{SepV}) \cap \{\varepsilon = 0\}) \quad (2)$$

H^{-1} непрерывно по (ε, x) на множестве

$$S(w_0) \cup \partial((\overline{PerW} \cup \overline{SepW}) \cap \{\varepsilon = 0\}) \quad (3)$$

Умеренная эквивалентность двух глокальных семейств V, W в окрестности замкнутых v_0 и w_0 -инвариантных множеств Z_1 и Z_2 определяется аналогично, только непрерывность H (H^{-1}) требуется на пересечении множества (2) с малой окрестностью Z_1 (соответственно, на пересечении множества (3) с малой окрестностью Z_2), причем $H_0(Z_1) = Z_2$.

Определение

Предельный цикл неинтересен, если выполняется одно из двух:

- *его гнездо содержит притягивающий или отталкивающий цикл;*
- *его гнездо состоит из одних полуустойчивых циклов, и внутри или вне гнезда имеется только одна особая точка, причем она невырождена.*

Определение

α или ω -предельное множество точки x относительно поля v неинтересное, если оно состоит из гиперболической особой точки или неинтересного предельного цикла.

Определение

Очень большой носитель бифуркации глокального поля V определяется только по полю v_0 как объединение всех негиперболических особых точек и предельных циклов поля v_0 , а также замыкания множества всех точек, у которых α , и ω -предельное множество являются интересными. Обозначение: $ELBS(v_0)$.

Определение

Большой носитель бифуркации глокального семейства V - это пересечение

$$LBS(V) = ELBS(v_0) \cap (Singv_0 \cup (\overline{PerV} \cup \overline{SepV}) \cap \{\varepsilon = 0\}).$$

Этот доклад основан на совместных работах с Н.Гончарук, А. Дуковым, Ю. Кудряшовым, Н. Солодовниковым, И. Щуровым, а также на работах Н.Гончарук, Ю. Кудряшова, Н. Солодовникова. Рисунки заимствованы из статей всех упомянутых авторов. Автор благодарен им, а также И.Шилину за помощь в подготовке презентации.

- [1] V. I. Arnold, V. S. Afrajmovich, Yu. S. Ilyashenko, and L. P. Shilnikov. Dynamical Systems V. Bifurcation Theory. Ed. by A. V. I. Vol. 5. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [2] A. V. Dukov. Bifurcations of the 'heart' polycycle in generic 2-parameter families. Trans. by I. Marshall. In: Transactions of the Moscow Mathematical Society (2018), pp. 209-229. doi: 10.1090/mosc/284. Trans. of "Bifurkacii politsikla 'serdce' v tipichnyh dvuparametricheskikh semeistvah". In: Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva 79.2 (2018), pp. 247 – 269.

- [3] A. V. Dukov and Yu. S. Ilyashenko. Numerical invariants in generic semilocal families of vector fields on two-dimensional sphere. In preparation.
- [4] N. B. Goncharuk and Yu. S. Ilyashenko. Large bifurcation supports. Apr. 2018. arXiv: 1804.04596.
- [5] N. Goncharuk and Yu. S. Ilyashenko. Equivalence relations in bifurcations of planar vector fields. Accepted to Proceedings of the Steklov Institute
- [6] N. Goncharuk, Yu. S. Ilyashenko, and N. Solodovnikov. Global bifurcations in generic one-parameter families with a parabolic cycle on S^2 . In: Moscow Mathematical Journal 19.4 , pp. 709–737.

- [7] N. Goncharuk, Yu. G. Kudryashov, and N. Solodovnikov. New structurally unstable families of planar vector fields. arXiv: 1908.02693 [math.DS].
- [8] Yu. S. Ilyashenko. Towards the General Theory of Global Planar Bifurcations". In: Mathematical Sciences with Multidisciplinary Applications. In Honor of Professor Christiane Rousseau. And In Recognition of the Mathematics for Planet Earth Initiative. Ed. by B. Toni. Vol. 157. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Cham: Springer, 2016.

- [9] Yu. S. Ilyashenko, Yu. G. Kudryashov, and I. Schurov. Global bifurcations in the two-sphere: a new perspective. In: *Inventiones mathematicae* 213.2 (Aug. 2018), pp. 461– 506.
- [10] Yu. S. Ilyashenko and N. Solodovnikov. Global Bifurcations in Generic One-Parameter Families with a Separatrix Loop on S^2 . In: *Moscow Mathematical Journal* 18.1 (January-March 2018), pp. 93 – 115
- [11] A. Kotova and V. Stanzo. On few-parameter generic families of vector fields on the two-dimensional sphere". In: *Concerning the Hilbert 16th problem*. Vol. 165. American Mathematical Society Translation Series 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, pp. 155–201.

- [12] V. Sh. Roitenberg. Non-local two-parametric bifurcations of planar vector fields. PhD thesis. Yaroslavl State Technical University, 2000.
- [13] I. Shilin. Sparkling saddle loops of vector fields on surfaces. arXiv:1903.01933
- [14] I. Shilin. Sparkling saddle loops: the non-orientable case. *In preparation*.
- [15] V. Starichkova. Global Bifurcations in Generic One-parameter Families on S^2 . In: Regular and Chaotic Dynamics 23.6 (2018), pp. 767–784

СПАСИБО!