Задача линеаризации для операторов Нийенхейса и левосимметрические алгебры

А.Ю.Коняев

Механико-математический факультет
МГУ им. Ломоносова
e-mail: maodzund@ya.ru

17 апреля 2021 г.

Операторное поле

Даны локальные координаты $u^1, \dots, u^n$. В этих координатах задана квадратная матрица L, компоненты которой L^i_j зависят от точки, то есть $L^i_j(u^1, \dots, u^n)$. При замене координат $u \to \bar{u}$

$$u^1(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n), \dots, u^n(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$$

операторное поле преобразуется как

$$\bar{L}(\bar{u}) = \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right)^{-1} L\big(u(\bar{u})\big)\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\right),$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^n} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} & \dots & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^2} & \dots & \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Кручение Нийенхейса

Кручением (тензором) Нийенхейса операторного поля L называют тензор типа $(1,2)$, определяемый по формуле:

$$\mathcal{N}_L(\xi,\eta) = L[L\xi,\eta] + L[\xi, L\eta] - L^2[\xi,\eta] - [L\xi, L\eta]$$

Здесь ξ,η — это векторные поля, а $[\,,\,]$ — коммутатор векторных полей. **Оператор Нийенхейса** — операторное поле с нулевым кручением Нийенхейса. **Скобкой Фролихера-Нийенхейса** двух операторных полей R и L называется тензор типа $(1,2)$, определяемый по формуле:

$$[[L,R]](\xi,\eta) = \mathcal{N}_{L+R}(\xi,\eta) - \mathcal{N}_L(\xi,\eta) - \mathcal{N}_R(\xi,\eta).$$

Подставляя выражения, получаем такую формулу

$$\begin{aligned}[][[L,R]](\xi,\eta) = {}& L[R\xi,\eta] + L[\xi,R\eta] + R[L\xi,\eta] + R[\xi,L\eta] - \\ & - LR[\xi,\eta] - RL[\xi,\eta] - [R\xi,L\eta] - [L\xi,R\eta]\end{aligned}$$

Некоторые свойства скобки Фролихера-Нийенхейса и кручения Нийенхейса

1. $[[L, \mathrm{Id}]] = 0$ для любого операторного поля L
2. $[[L, L]] = 2\mathcal{N}_L$
3. Если L — оператор Нийенхейса, то $[[L^k, L^m]] = 0$ для любых k, m. Как следствие, для любого многочлена $p(t)$ с постоянными коэффициентами $p(L)$ — оператор Нийенхейса
4. Если компоненты L, R — однородные полиномы степеней k, m соответственно, то компоненты тензора $[[L, R]]$ — однородные полиномы степени $k + m - 1$

Где возникают операторы Нийенхейса?

- Вещественное многообразие M^{2n} является комплексным, тогда и только тогда, когда на нем задано операторное полу J, удовлетворяющее двум условиям: $\mathrm{J}^2 = -\operatorname{Id}$ и $\mathcal{N}_{\mathrm{J}} = 0$ (теорема Ньюлэндера-Ниренберга)
- Две метрики g и $\bar{g}$ называются проективно эквивалентными, если их геодезические совпадают как непараметризованные множества. Если метрики проективно эквивалентные, то $L = \left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{g}^{-1} g$ — оператор Нийенхейса. Геометрия этого оператора играет ключевую роль в классификации пар таких метрик и соответсвующих многообразий
- Для оператора Нийенхейса L рассмотрим квазилинейную систему

$$u^\alpha_t = \left(L^\alpha_q - \epsilon \operatorname{tr} L\, \delta^\alpha_q\right) u^q_x, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

  а ϵ — вещественная константа. Такие системы называются экспислон-системами и они описывают множество физических процессов, связанных с газовой динамикой, хроматографией и прочими вещами

Где возникают операторы Нийенхейса?

- Пусть даны две скобки Пуассона с тензорами Пуассона $\mathcal{P}$ и $\bar{\mathcal{P}}$, причем $\bar{\mathcal{P}}$ — невырожденная скобка. Согласованность скобок эквивалентна тому, что $L = \mathcal{P}\bar{\mathcal{P}}^{-1}$ — оператор Нийенхейса. Он называется оператором рекурсии и используется для построения интегралов бигамильтоновых систем
- Пусть даны две контрвариантные метрики g и $\bar{g}$ с постоянными кривизнами. Каждая метрика задает на пространстве петель задает слабо нелокальную скобку Пуассона первого порядка (для нулевой кривизны это скобки Пуассона гидродинамического типа). Если скобки согласованы, то оператор $L = \bar{g}g^{-1}$ — оператор Нийехейса. К такого рода системам сводятся, например, уравнения Кортвега-ди Фриза и много других.
- Левоинвариантный оператор Нийенхейса на группе Ли G сводится к оператору Нийехейса на алгебре Ли. Эти операторы возникают при изучении метода сдвига аргумента.

Регулярные точки операторов Нийенхейса

Точка p называется регулярной, если в достаточно малой ее окрестности алгебраический тип опеатора - количество собствнных значений, их кратности, размеры и количество жордановых блоков - не меняется. Если точка не регулярна, то она называется сингулярной. Какие есть теоремы о регулярных точках?

Теорема

Пусть L — оператор Нийенхейса и в каждой точке $U(\mathrm{p})$ его собственные значения попарно различны. Тогда существует система координат $u^1, \dots, u^n$ в которой

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(u^1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u^2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(u^3) & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n(u^n) \end{pmatrix}$$

Регулярные точки операторов Нийенхейса

Теорема

Пусть L — оператор Нийенхейса на вещественном многообразии размерности $2n$, в каждой точке $U(\mathrm{p})$ его собственные значения комплексны и оператор диагонализуем. Тогда

1. На $U(\mathrm{p})$ существует комлексная структуа J с условием $\mathrm{J}L = L\mathrm{J}$
2. Комплексификация оператора L^{C} — голоморфное операторное поле относительно J
3. В подходящих комплексных координатах $z^1, \dots, z^n$

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(z^1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(z^2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(z^3) & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n(z^n) \end{pmatrix}$$

Регулярные точки операторов Нийенхейса

Теорема

Пусть L — оператор Нийенхейса и в каждой точке $U(\mathrm{p})$ он сопряжен Жорданову блоку максимальной размерности с собственным значением λ. Тогда существует система координат $u^1, \dots, u^n$ такая, что

$$L = \begin{pmatrix} \lambda(u^n) & 1 & 0 & \dots & 0 & g_1 \\ 0 & \lambda(u^n) & 1 & \dots & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & \lambda(u^n) & \dots & 0 & g_3 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(u^n) & g_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(u^n) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $g_{n-1} = 1$ и $g_i = -(n-i-1)\lambda' u^i$ для $i = 1, \dots, n-2$.

Теорема о расщеплении

Рассмотрим оператор Нийенхейса L в окрестности точки p. Пусть в p характеристический многочлен L раскладывается в произведение двух взаимно простых многочленов $\chi_L(t) = p(t)q(t)$ степеней k и m соответственно. Тогда в окрестности точки p существует такая система координат $u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^m$, что

1. Оператор L принимает вид
$$L = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$
где K — матрица размера $k \times k$, M — матрица размера $m \times m$
2. K зависит только от координат u^i, M зависит только от координат v^i и оба — операторы Нийенхейса
3. Характеристический многочлен K — это $p(t)$, характеристический многочлен M — это $q(t)$

Сингулярные точки операторов Нийенхейса

Сингулярная точка p называется точкой скалярного типа, если $L = \lambda_{\mathrm{p}} \operatorname{Id}$ в этой точке, где константа λ_{p} называется весом. Из свойств скобки Фролихера-Нийенхейса получаем, что для любой постоянной c оператор $L - c \operatorname{Id}$ — тоже оператор Нийенхейса, поэтому без ограничения общности будем считать, что вес точки у нас всегда ноль. Разложим операторное поле в ряд в скалярной точке p

$$L = L_1 + L_2 + \dots,$$

где L_i — матрица, компоненты которой представляют собой однородные многочлены степени i. Для кручения Нийенхейса получаем

$$[[L, L]] = {\color{blue}[[L_1, L_1]]} + {\color{red}2[[L_1, L_2]]} + \Big(2[[L_1, L_4]] + [[L_2, L_2]]\Big) + \dots$$

Если L — оператор Нийенхейса, то L_1 — оператор Нийенхейса, компоненты которого однородные линейные многочлены.

Сингулярные точки операторов Нийенхейса

Возьмем разложение векторных полей ξ, η в той же точке p

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots, \quad \eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots$$

и рассмотрим

$$[\xi, L\eta]^k = [\xi_0 + \xi_1 + \dots, L_1\eta_0 + \big(L_2\eta_0 + L_1\eta_1\big) + \dots]^k =$$
$$= \frac{\partial (L_1)^k_i}{\partial u^j}\eta_0^i \xi_0^j + \dots$$

Таким образом, на касательном пространтсве в точке p у нас получилась билинейная операция: для любых $\xi_0, \eta_0 \in T_{\mathrm{p}}M$

$$\xi_0 \star \eta_0 = [\xi, L\eta]|_{\mathrm{p}},$$

где ξ, η — произвольные продолжения векторов на окрестность точки в качестве векторных полей. При этом, как мы выяснили, операция от продолжения не зависит.

Левосимметрические алгебры

Конечномерная алгебра $\mathfrak{a}$ — это векторное пространство, снабженное билинейной операцией $\star$.

Ассоциатором алгебры называется трилинейная операция

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \xi \star (\eta \star \zeta) - (\xi \star \eta) \star \zeta.$$

Если ассоциатор ноль, то алгебра ассоциативна. Например, матричная алгебра ассоциативна.

Алгебра $\mathfrak{a}$ называется **левосимметрической**, если ее ассоциатор для любой тройки ξ, η, ζ обладает свойством

$$\mathcal{A}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{A}(\eta, \xi, \zeta)$$

Если алгебра ассоциативна, то она левосимметрична.

Левосимметрические алгебры

Главное свойство левосимметрической алгебры: коммутатор $[\xi, \eta] = \xi \star \eta - \eta \star \xi$ удовлетворяет тождеству Якоби. То есть с каждой левосимметрической алгеброй ассоциирована некоторая алгебра Ли.

Теорема

Пусть задана конечномерная алгебра $\mathfrak{a}$ размерности n над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Такая алгебра несет естественную структуру аффинного пространства. Зададим на этом пространстве операторное поле по правилу

$$L_\eta \xi = \xi \star \eta$$

где $\xi \in T_\eta \mathfrak{a}$, которое отождествлено с $\mathfrak{a}$. В этом случае алгебра $\mathfrak{a}$ левосимметрична тогда и только тогда, когда L - оператор Нийенхейса. Заметим, что компоненты оператора линейно зависят от координат.

Для оператора Нийенхейса L_1 — это в точности операторное поле, ассоциированное с левосимметрической алгеброй в точке скалярного типа.

Линеаризация оператора Нийенхейса в окрестности скалярной точки

Мы выяснили, что операция, возникающая на касательном пространстве к сингулярной точке скалярного типа оператора Нийенхейса - это левосимметрическая алгебра. У этой левосимметрической алгебры есть свой оператор Нийенхейса, тот самый L_1. Соответственно, задача линеаризации - понять, когда заменой координат в точке p мы можем избавиться от остальных членов $L_i, i > 1$ в разложении L в этой точке.

Пример

Возьмем двумерный оператор Нийенхейса в координатах x, y

$$L = \begin{pmatrix} y + yx^2 & x + x^3 \\ -xy^2 & y - yx^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} yx^2 & x^3 \\ -xy^2 & -yx^2 \end{pmatrix}$$

Дискриминант характеристического многочлена $(\operatorname{tr} L)^2 - 4 \det L = -4x^2y^2$. Если оператор линеаризуется, то дискриминант должен быть тождественным нулем.

Диагональная левосимметрическая алгебра

Теорема

Рассмотрим оператор Нийенхейса L и пусть $L = L_1 + L_2 + \dots$ — его разложение в сингулярной точке скалярного типа p. Пусть в подходящей системе координат $u^1, \dots, u^n$

$$L_1 = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u^3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}$$

Тогда L линеаризуется в формальной (и аналитической) категории.

Идея доказательства

- Вычислим $[[L_1, R]]$ для произвольного операторного поля R. Получим

$$[[L_1, R]]^i_{ij} = (u^i - u^j)\frac{\partial R^i_i}{\partial u^j} - R^i_j$$

- Для разложения оператора Нийенхейса получаем $[[L_1, L_2]] = 0$. То есть для $i \neq j$

$$(L_2)^i_j = (u^i - u^j)\frac{\partial (L_1)^i_i}{\partial u^j}$$

- Берем замену координат $\bar{u}^\alpha = u^\alpha + f^\alpha(u)$, где f^α — квадратичный многочлен
- Получаем, что

$$\bar{L} = \left(\mathrm{Id} + \frac{\partial f}{\partial u}\right)^{-1} L\left(\mathrm{Id} + \frac{\partial f}{\partial u}\right) = L_1 + \left(L_2 + L_1\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}L_1\right) + \dots$$

Идея доказательства

- Условие $[[L_1, L_2]] = 0$ означает, что в качестве f^i надо брать $(L_2)^i_i$. В этом случае

$$L_1 + \left(L_2 + L_1 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} L_1 \right) = L_1 + \mathrm{diag}\{f^1, \ldots, f^2\} = L_1(\bar{u})$$

- Повторяем процесс для $k > 2$
- Получили формальную линеаризацию. Хорошие координаты - это формальные корни характеристического уравнения

$$0 = \chi_L(t) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \cdots + \sigma_n$$

По теореме Артина, получаем, что существуют и аналитические решения

Теорема о линейной части в размерности два

В размерности два линейная часть L_1 в сингулярной точке скалярного типа приводится в подходящей системе координат ровно к одному из следующих видов (разные значения α и β задают неэквивалентные нормальные формы)

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & \beta x \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & y \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Невырожденные линейные части

Будем называеть линейную часть L_1 невырожденной (и соответствующую левосимметрическую алгебру тоже) если верно, что для любого Нийензейсова оператора $L = L_1 + L_2 + \dots$ с такой линейной частью существует линеаризация. Невырожденность бывает в формальной, аналитической и гладкой катеории. Мы поговорим про две последние.

Невырожденные линейные части: гладкий случай

Определим множество Σ_{sm} как множество таких x, что

$$\{x \leq 0\} \cup \{x = \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{x = m | m \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$$

Выполнена следующая теорема

Теорема

Невырожденные линейные части в гладкой категории - это в точности

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \quad \alpha \notin \Sigma_{\mathrm{sm}}$$

Все остальные линейные части - вырождены.

Невырожденные линейные части: аналитический случай

Пусть $[q_0, q_1, \dots]$ — разложение иррационального числа x в цепную дробь, то есть представление его в виде

$$x = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

где q_0 — целое, а $q_i, i > 0$ — натуральные. Число x называется **числом Брюно**, если

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log q_{i+1}}{q_i} < \infty$$

Обозначим через Σ_{u} множество отрицательных иррациональных чисел, которые не являются числами Брюно. Множество таких чисел имеет меру ноль.

Невырожденные линейные части: аналитический случай

Определим множество Σ_{an} как множество таких x, что

$$\{x=0\}\cup\{x=-\frac{p}{q}|p,q\in\mathbb{N}\}\cup\{x=\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N},n\geq 2\}\cup\{x=m|m\in\mathbb{N},n\geq 3\}$$

Теорема

Следующие линейные части невырождены

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 2y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix} \quad \alpha\notin\Sigma_{\mathrm{an}}\cup\Sigma_{\mathrm{u}}$$

Все остальные линейные части за исключением $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}$ при $\alpha\in\Sigma_{\mathrm{u}}$ вырождены.

Особенный случай

Из теоремы получается, что вопрос линеаризации оператора Нийенхейса для линейной части

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & \alpha y \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \Sigma_{\mathrm{u}}$$

в аналитическом случае открыт. Он сводится к такой задаче линеаризации: пусть дано аналитическое векторное поле

$$\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = \alpha y,$$

где $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{u}}$. Линейная часть $f(x, y)$ в начале координат — это просто x. Когда векторное поле можно линеаризовать заменой координат вида $\bar{x} = g(x, y), \bar{y} = y$?

Литература

- Alexey V. Bolsinov, Andrey Yu. Konyaev, Vladimir S. Matveev, Nijenhuis Geometry, `https://arxiv.org/abs/1903.04603`
- Andrey Yu. Konyaev, Nijenhuis geometry II: Left-symmetric algebras and linearization problem for Nijenhuis operators, `https://arxiv.org/abs/1903.06411`
- Alexey Bolsinov, Andrey Konyaev, Vladimir Matveev, Nijnehuis Geometry III: gl-regular Nijenhuis operators, `https://arxiv.org/abs/2007.09506`