

Ройтенберг В.Ш. О некоторых нелокальных диффеоморфизмах
дифуркации Рекуррентных полей на поверхности, имеющих особую
точку типа седло-узел. 36 Деп. в ВИНИТИ № 3076-891

и петля сепаратрисы $L_{II}^-(\epsilon)$, гомотопная $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2^k$. При $\epsilon \in E_{12}$ поле X_ϵ имеет петлю сепаратрисы $L_{II}^-(\epsilon)$, гомотопную Γ_2 . Все циклы - односторонние устойчивые гиперболические.

§ 4. БИФУРКАЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ, ИМЕЮЩЕГО СЕПАРАТРИСУ СЕДЛО-УЗЛА, ПРЕДЕЛЬНУЮ К ПЕТЛЕ СЕПАРАТРИСЫ СЕДЛА

Рассмотрим векторное поле X^0 , удовлетворяющее следующим условиям (D): Существует квазигиперболическая особая точка z^c - седло-узел с ω -параболическим сектором и входящей сепаратрисой L_0^+ , α -предельной к петле Γ сепаратрисы гиперболического седла z^1 с седловой величиной $\sigma_1 := \operatorname{div} X^0(z^1) > 0$.

Будем различать случаи а) и б), изображенные на рис.7. Их формальное описание не представляет сложности и мы не станем останавливаться на нем.

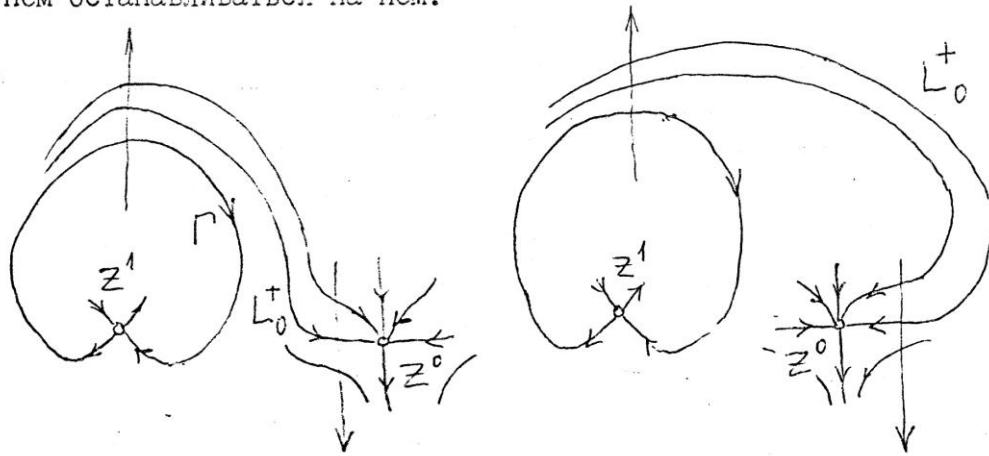


Рис.7. Траектории поля X^0 , удовлетворяющего условиям (D).

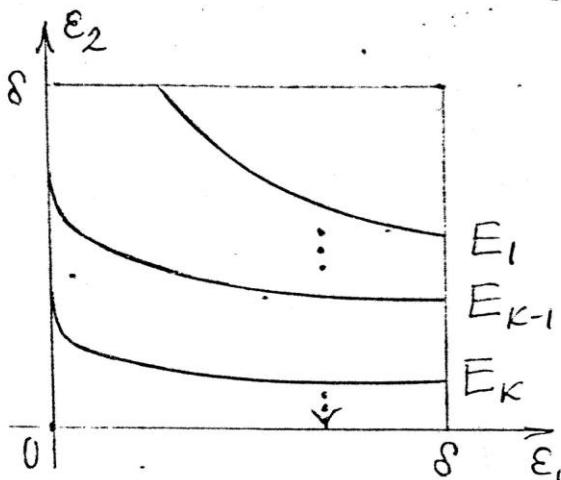
Теорема Д. Для типичной двухпараметрической деформации $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ векторного поля X^0 , удовлетворяющего условиям (Д) существуют C^1 -координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в окрестности точки $0 \in E$, число $\delta > 0$ и окрестность U множества $\Gamma \cup L_0^+ \cup \{Z^0\}$ со следующими свойствами. Векторное поле X_ε , $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta, \delta)^2$, имеет в U особые точки: при любом ε гиперболическое седло $Z_1(\varepsilon)$, $Z_1(\cdot) \in C^1$, $Z_1(0) = Z^0$, при $\varepsilon_1 > 0$ гиперболический узел $Z_{00}(\varepsilon)$ и гиперболическое седло $Z_0(\varepsilon)$, при $\varepsilon_1 = 0$ седло-узел $Z_0(\varepsilon)$ при этом $Z_0(\cdot) \in C^0$, $Z_0(0) = Z^0$ и существует непрерывно зависящая от $\varepsilon \in [0, \delta] \times (-\delta, \delta)$ сепаратриса $L_0^+(\varepsilon)$ точки $Z_0(\varepsilon)$, совпадающая при $\varepsilon = 0$ с L_0^+ . Поле X_ε в U имеет петлю сепаратрисы седла $Z_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon_2 = 0$, имеет (не имеет) замкнутую траекторию при $\varepsilon_2 < 0$ ($\varepsilon_2 > 0$). Множество тех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, при которых сепаратриса $L_0^+(\varepsilon)$ принадлежит U и ω -предельна к $Z_1(\varepsilon)$, является объединением дуг

$$E_K = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta, \delta)^2 \mid \varepsilon_2 = \gamma_K(\varepsilon_1)\},$$

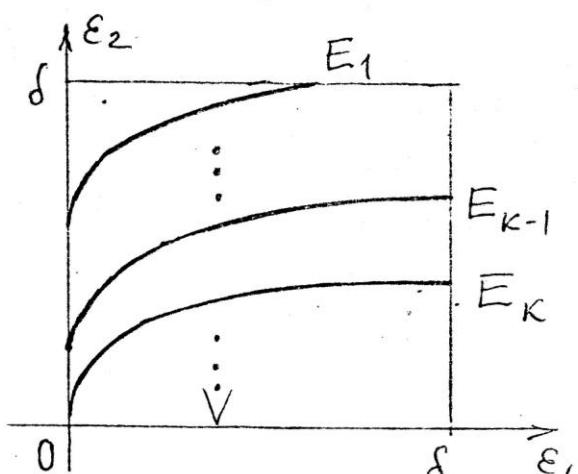
где $\gamma_K : (0, \delta) \rightarrow (0, +\infty)$, $\gamma_K \in C$, $\gamma_K|_{(0, \delta)} \in C^1$,

$\forall \varepsilon_1 \in [0, \delta] \quad \gamma_K(\varepsilon_1) \downarrow 0$, $\gamma'_K(+0) = -\infty (+\infty)$ в случае

a) (в случае б)) (рис.8)



a)

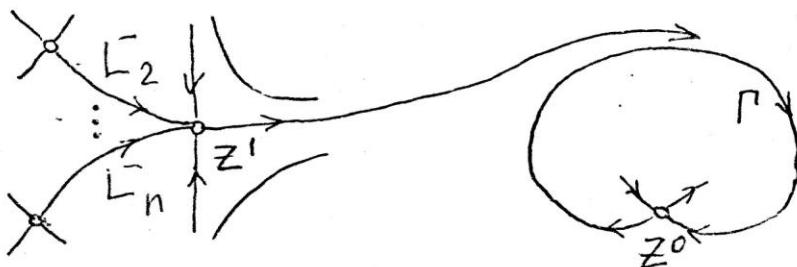


б)

Рис.8. К теореме Д.

Рассмотрим теперь векторное поле X^0 , удовлетворяющее следующим условиям.

(\mathcal{E}) Существует квазигиперболическая особая точка z^1 - седло-узел с ω -параболическим сектором и выходящей сепаратрисой L_1^- , ω -предельной к петле Γ гиперболического седла z^0 с седловой величиной $\sigma_c < 0$. К седло-узлу z^1 ω -предельны сепаратрисы L_k^- ($k = \overline{2, n}$) гиперболических седел, отличных от L_1^- , при этом L_k^- ($k = \overline{2, n}$) не являются входящими сепаратрисами седло-узла z^1 (и пронумерованы так, как указано на рис.9).

Рис.9. Траектории поля X^0 , удовлетворяющего условиям \mathcal{E} .

Теорема \mathcal{E} . Для типичной двухпараметрической деформации $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ векторного поля X^0 существуют C^1 -координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в окрестности точки $0 \in E$, число $\delta > 0$ и окрестность U множества $\Gamma \cup \{z^0, \dots, z^n\} \cup L_1^- \cup \dots \cup L_n^-$ со следующими свойствами. Векторное поле X_ε , $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta, \delta)^2$, имеет в U такие особые точки: при любом ε - гиперболические седла $Z_s(\varepsilon)$, $s=0 \vee s=\overline{2, n}$, $Z_s(\cdot) \in C$, $Z_s(0) = Z^s$, при $\varepsilon_1 > 0$ гиперболический узел $Z_1^*(\varepsilon)$ и гиперболическое седло $Z_1(\varepsilon)$, при $\varepsilon_1 = 0$ - седло-узел $Z_1(\varepsilon)$, при этом $Z_1(\cdot) \in C$, $Z_1(0) = Z^1$. Существуют непрерывно зависящие от ε выходящие сепаратрисы $L_s^-(\varepsilon)$ особых точек $Z_s(\varepsilon)$, $L_s^-(0) = L_s^-$, $s = \overline{1, n}$. Поле X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ в U имеет петлю сепаратрисы седла $Z_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon_2 = 0$, имеет (не имеет) замкнутую траекторию при $\varepsilon_2 < 0$ ($\varepsilon_2 > 0$). Сепаратриса $L_s^-(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, $s = \overline{1, n}$, принадлежит U и ω -предельна к седлу $Z_0(\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{sk}, E_{sk} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (-\delta, \delta)^2 \mid \varepsilon_2 = \gamma_{sk}(\varepsilon_1)\}, \text{ где}$$

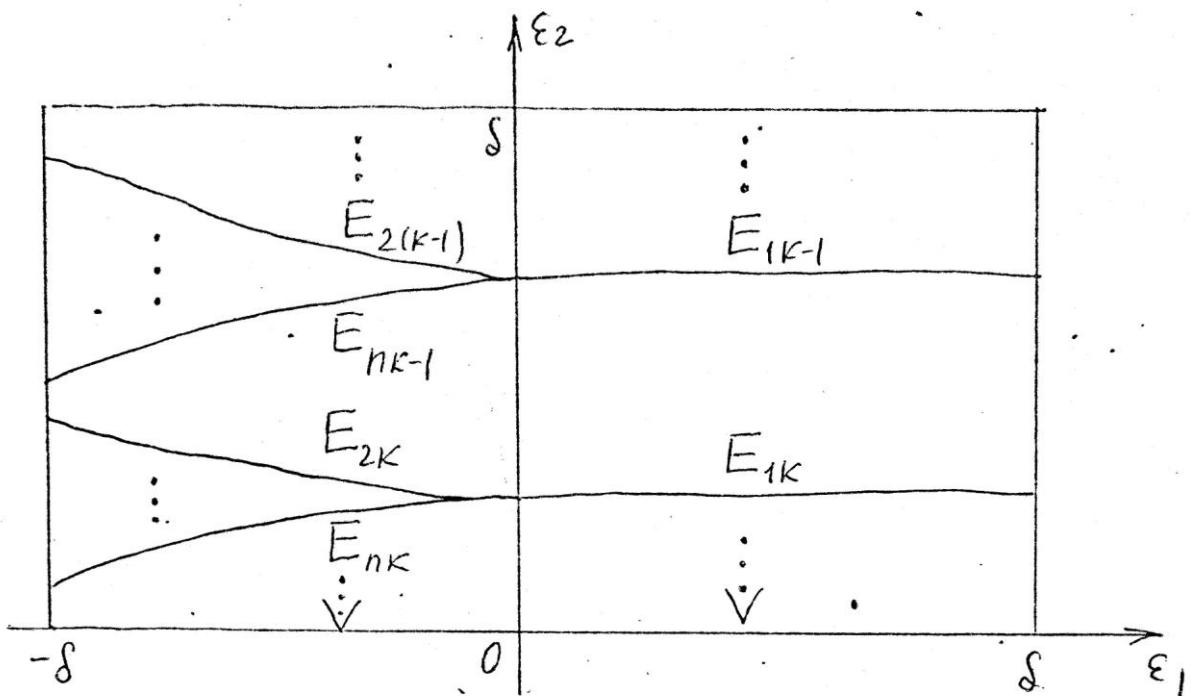
$$\gamma_{1k} : [0, \delta) \rightarrow (0, +\infty), \gamma_{1k} \in C^1, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_{1k}\|_{C^1} = 0,$$

$$\forall \varepsilon_1 \in [0, \delta) \quad \gamma_{1k+1}(\varepsilon_1) < \gamma_{1k}(\varepsilon_1),$$

$$\text{при } s = \overline{2, n} \quad \gamma_{sk} : (-\delta, 0) \rightarrow (0, +\infty), \gamma_{sk} \in C^1,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_{sk}\|_{C^1} = 0, \quad \gamma_{sk}(-0) = \gamma_{1k}(0), \quad \gamma'_{sk}(-0) = \gamma'_{1k}(0).$$

$$\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0) \quad \gamma_{1k}(\varepsilon_1) < \dots < \gamma_{2k}(\varepsilon_1) < \dots < \gamma_{n(k-1)}(\varepsilon_1) \quad (\text{рис. 10}).$$

Рис.10. К теореме \mathcal{E} .