Опубликовано в книге: Математика и Математическое образование. Теория и практика. Вып. 6. Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль. Изд-во ЯГТУ. 2008. С. 35–45.

УДК 517.9

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет

О БИФУРКАЦИЯХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ИМЕЮЩИХ ЯЧЕЙКУ, ОГРАНИЧЕННУЮ ДВОЙНЫМИ ЦИКЛАМИ

Изучаются бифуркации векторных полей на двумерной сфере, имеющих ячейку, ограниченную двумя двойными циклами, к одному из которых ω – предельны, а к другому α – предельны сепаратрисы седел.

1. Постановка задачи. Пусть X^r - банахово пространство C^r – векторных полей с C^r – нормой, заданных на двумерной сфере S^2 ($r \geq 9$). Рассмотрим векторные поля $X_0 \in \mathrm{X}^r$, удовлетворяющие следующим условиям.

(C_1) *Все его особые точки и замкнутые траектории гиперболические, за исключением двойных циклов Γ_1 и Γ_2, ограничивающих двухсвязную ячейку – кольцо K, траектории из которой α – предельны к Γ_1 и ω – предельны к Γ_2. Отсутствуют седловые связки. Существуют выходящие сепаратрисы L_{0i}^- седел p_i^0, $i \in \{1,2,...,m\}$, ω – предельные к Γ_1, и входящие сепаратрисы L_{0j}^+ седел q_j^0, $j \in \{1,2,...,n\}$, α – предельные к Γ_2* (Рис. 1).

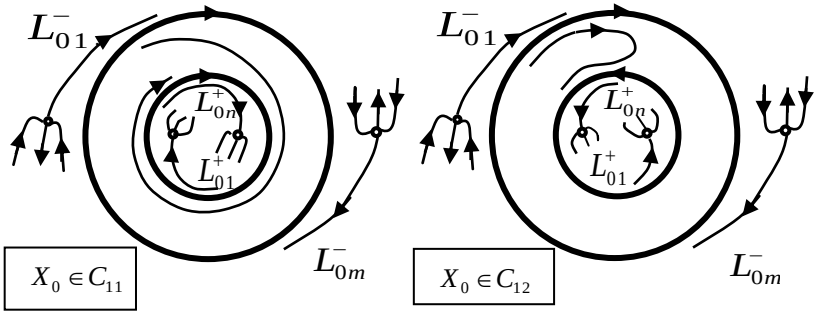

Рис. 1. Траектории векторного поля $X_0 \in C_1$.

Векторные поля, удовлетворяющие условиям (C_1), образуют в X^r погруженное C^{r-1} – подмногообразие C_1 коразмерности два. Бифуркации таких векторных полей в случае, когда или $m=1$, или $n=1$ описаны в [1 – 2]. Здесь мы разберем более трудный случай $m \geq 2, n \geq 2$. Аналогичная ситуация, когда $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ($\mathrm{K} = \varnothing$) изучалась в [3, 4] . Мы будем использовать методы, разработанные автором в [4, 5].

2. Канонические координаты в окрестности двойного цикла. Определяющий диффеоморфизм. Обозначим $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ стандартную окружность. В дальнейшем мы не будем педантично различать точки $s \in \mathbf{R}$ и точки $s(\mathrm{mod}1) \in \mathbf{S}^1$, а также 1-периодические функции на $\mathbf{R}$ и функции на $\mathbf{S}^1$.

Из [6, 7] следует, что существует такой диффеоморфизм h_k кольца $(-\sigma, \sigma) \times \mathbf{S}^1$ на окрестность U_k двойного цикла Γ_k ($k = 1,2$), что

$$h_k(\{0\} \times \mathbf{S}^1) = \Gamma_k, \; h_1((0, \sigma) \times \mathbf{S}^1) \cup h_2((-\sigma, 0) \times \mathbf{S}^1) \subset \mathrm{K},$$

а векторное поле $X_0\big|_{U_k}$ имеет в *канонических координатах* (x, s), задаваемых h_k в U_k, те же траектории (и с той же ориентацией), что и векторное поле $X_k^*(x,s) = P_{0k}(x)\partial/\partial x + 1 \cdot \partial/\partial s$, где $P_{0k} \in C^{r-4}$, $P_{0k}(x) = x^2 + o(x^2)$, $P_{0k}(x) > 0$ при $x \neq 0$. Канонические координаты определены не однозначно, но разность s-координат точек уже однозначна: если h_k и h_k' - два разных диффеоморфизма, задающие канонические координаты в окрестности Γ_k, то найдется такое $a \in \mathbf{S}^1$, что если $h_k(x, s) = h_k'(x', s')$, то $s' = s + a$.

Обозначим $\Gamma_k^{\pm} := h_k(\{\pm d\} \times \mathbf{S}^1)$ при некотором $d \in (0, \sigma)$. Сепаратриса L_{0i}^-, $i \in \{1,2,...,m\}$, (L_{0j}^+, $j \in \{1,2,...,n\}$) пересекает трансверсаль Γ_1^- (Γ_2^+) в единственной точке. Пусть это точка $h_1(-d, u_i^0)$ ($h_2(d, v_j^0)$). Положим также $u_{m+1}^0 := u_1^0$ и $v_{n+1}^0 := v_1^0$. Величины $u_{ik}^0 := u_k^0 - u_i^0$ и $v_{jl}^0 := v_l^0 - v_j^0$ являются инвариантами векторного поля $X_0 \in C_1$.

Так как каждая траектория из K пересекает обе трансверсали Γ_1^+ и Γ_2^-, то определен диффеоморфизм $f_0 : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, такой, что $h_1(d,s) \mapsto h_2(-d, f_0(s))$ является отображением Γ_1^+ на Γ_2^- по траекториям

поля $X_0 \in C_1$. Назовем $f_{X_0} = f_0$ *определяющим диффеоморфизмом* векторного поля X_0.

Введем отображения $f_{ijkl} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, заданные формулами

$$f_{ijkl}(s) = f_0(s + u_{ik}^0) - f_0(s) - v_{jl}^0 .$$

Они являются инвариантами векторного поля X_0. Зададим в C_1 подмножества C_{11} и C_{12} следующими условиями: $X_0 \in C_{11}$ ($X_0 \in C_{12}$), если f_{X_0} сохраняет (меняет) ориентацию, а уравнения $f_{ijkl}(s) = 0$ при $i \neq k,\ j \neq l$ имеют только простые корни. Нетрудно убедиться, что $C_{11} \cup C_{12}$ - открытое всюду плотное подмножество C_1.

Пусть M'_{kl} - множество точек (s_1, s_2) на торе $\mathbf{T}^2 := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, удовлетворяющих уравнению

$$s_2 = f_0(s_1 + u_{1k}^0) - v_{1l}^0, \quad k \in \{1,2,...,m\}, \quad l \in \{1,2,...,n\},$$

а $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ - стандартная проекция. Обозначим $M_{kl} := \pi^{-1}(M'_{kl})$.

3. Бифуркации векторных полей из C_1. Рассмотрим *двухпараметрическую деформацию* $\{X_\varepsilon\}$ *векторного поля* $X_0 \in C_1$ - C^r – отображение $\mathrm{E} \ni \varepsilon \mapsto X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r$ достаточно малой окрестности нуля в $\mathbf{R}^2$ в пространство векторных полей, трансверсальное C_1 в точке X_0. Уменьшив при необходимости окрестность E, мы можем выбрать в ней координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, чтобы у поля X_ε, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, существовали выходящие (входящие) сепаратрисы

$$L_i^-(\varepsilon), \ i \in \{1,2,...,m\} \qquad (L_j^+(\varepsilon), \ j \in \{1,2,...,n\})$$

седел, непрерывно зависящие от ε, и совпадающие с L_{0i}^- (L_{0j}^+) при $\varepsilon = 0$. Кроме того, мы можем считать, что при $\varepsilon_1 = 0$ ($\varepsilon_2 = 0$) в окрестности U_1 (U_2) имеется единственная замкнутая траектория – двойной цикл, а при $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_2 > 0$) в этой окрестности нет замкнутых траекторий. Согласно [1 – 2] при достаточно малом $\delta > 0$

$$\text{для } \varepsilon \in (0,\delta)^2, \ i \in \{1,2,...,m\}, \ j \in \{1,2,...,n\} \quad L_i^-(\varepsilon) = L_j^+(\varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon \in B_{ij},$$

где множества B_{ij} имеют следующие свойства.

1) В случае, когда f_{X_0} сохраняет ориентацию, B_{ij} является объединением не пересекающихся между собой открытых C^1 – гладких дуг B_{ij}^p,

$p \in \mathbf{N}$, таких, что замыкание $\overline{B}_{ij}^{p}$ дуги B_{ij}^{p} является дугой, один из концов которой принадлежит $\{\delta\}\times(0,\delta)$, а другой $(0,\delta)\times\{\delta\}$. При этом последовательность B_{ij}^{p} имеет топологическим пределом при $p\to\infty$ множество $[0,\delta]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,\delta]$.

2) В случае, когда f_{X_0} меняет ориентацию, B_{ij} является объединением не пересекающихся между собой открытых C^1-гладких дуг B_{ij}^{p}, $p\in\mathbf{Z}$, таких, что замыкание $\overline{B}_{ij}^{p}$ дуги B_{ij}^{p} является дугой, один из концов которой совпадает с точкой (0,0), а второй принадлежит множеству $(0,\delta]\times\{\delta\}\cup\{\delta\}\times(0,\delta]$. При этом последовательность B_{ij}^{p} имеет топологическим пределом при $p\to-\infty$ множество $\{0\}\times[0,\delta]$, а при $p\to+\infty$ множество $[0,\delta]\times\{0\}$.

В предположении, что $X_0\in C_{11}\cup C_{12}$, мы опишем взаимное расположение множеств B_{ij}.

Теорема. *При достаточно малом* δ *существует* C^1-*диффеоморфизм* $\varphi:(0,\delta)^2\to U\subset\mathbf{R}^2$ *такой, что для всех* $i\in\{1,2,\ .m\}$, $j\in\{1,2,...,n\}$ $\varphi(B_{ij})=M_{ij}\cap U$.

Доказательство теоремы приведено ниже в пунктах 4-8.

4. Векторное поле X_ε в окрестностях двойных циклов. Будем далее обозначать $k\mapsto\bar{k}$ нетождественную перестановку множества $\{1,2\}$. Аналогично диффеоморфизму h_k мы можем при достаточно малом $\delta_*>0$ построить диффеоморфизмы $h_{k\varepsilon}$, $\varepsilon\in(-\delta_*,\delta_*)^2$, кольца $(-\sigma,\sigma)\times\mathbf{S}^1$ на окрестность $U_{k\varepsilon}$ двойного цикла Γ_k ($k=1,2$) такие, что $h_{k0}=h_k$, а векторное поле $X_\varepsilon\big|_{U_{k\varepsilon}}$ имеет в координатах (x,s), задаваемых $h_{k\varepsilon}$ в $U_{k\varepsilon}$, те же траектории, что и векторное поле

$$X_{k\varepsilon}^{*}(x,s)=(\widetilde{P}_k(x,\varepsilon_{\bar{k}})+R_k^{*}(x,s,\varepsilon))\partial/\partial x+1\cdot\partial/\partial s\,,$$

где $\widetilde{P}_k,\ R_k^{*}\in C^{r-4}$,

$$\widetilde{P}_k(x,\varepsilon_{\bar{k}})=x^2+o(x^2)\,, \tag{1}$$

$$\widetilde{P}_k(x,0)=P_k(x)\text{, а } R_k^{*}(x,s,\varepsilon)=0 \text{ при } \varepsilon_k=0\,.$$

Обозначим $\nu_k(s,\varepsilon_{\bar{k}}) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} R_k^*(0,s,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon_k=0}$. Нетрудно видеть, что отсутствие в окрестности Γ_k замкнутых траекторий при $\varepsilon_k > 0$ равносильно тому, что $a_k = \int_0^1 \nu_k(s,\varepsilon_{\bar{k}})ds > 0$. Сделав замену параметров $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / a_1$, $\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / a_2$ и вернувшись к прежним обозначениям, мы можем считать, что $\int_0^1 \nu_k(s,\varepsilon_{\bar{k}})ds = 1$. Но тогда определена замена координат

$$(x,\, s) \mapsto (y = x - \varepsilon_k \int_0^s ((\nu_k(\tau,\varepsilon_{\bar{k}}) - 1)d\tau,\, s)\,.$$

В новых координатах

$$X_{k\varepsilon}^*(y,s) = (\varepsilon_k + \widetilde{P}_k(y,\varepsilon_{\bar{k}}) + R_k^{**}(y,s,\varepsilon))\partial/\partial y + 1\cdot\partial/\partial s\,,$$

где

$$R_k^{**}(y,s,\varepsilon_k)\Big|_{\varepsilon_k=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} R_k^{**}(0,s,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon_k=0} = 0\,. \qquad (2)$$

Ввиду (1)-(2)

$$X_{k\varepsilon}^* = (\varepsilon_k + y^2 + y^3 R_k(y,\varepsilon) + \varepsilon_k^2 \alpha_k(s,\varepsilon) + \varepsilon_k y \beta_k(s,\varepsilon) + \varepsilon_k y^2 \gamma_k(y,s,\varepsilon)))\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}$$

где $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, R_k \in C^{r-7}$.

Сделав теперь замену $(y,s) \mapsto (z,s)$, где

$$z = (y - \frac{1}{2}\varepsilon_k \int_0^1 \beta_k(s,\varepsilon)ds)\exp \varepsilon_k (\int_0^s \beta_k(\tau,\varepsilon)d\tau - s\int_0^1 \beta_k(\tau,\varepsilon)d\tau)\,,$$

получим в новых координатах $X_{k\varepsilon}^* = P_k(z,s,\varepsilon)\partial/\partial z + 1\cdot\partial/\partial s$, где

$$P_k(z,s,\varepsilon) = (\varepsilon_k + z^2 + z^3 R_k(z,\varepsilon) + \varepsilon_k^2 a_k(z,s,\varepsilon) + \varepsilon_k z^2 b_k(z,s,\varepsilon))\,,$$

$$a_k, b_k \in C^{r-7}.$$

5. Трансверсали в окрестностях двойных циклов. Функции соответствия между трансверсалями. В дальнейшем мы будем использовать в оценках универсальную постоянную D, то есть все положительные постоянные, конкретное значение которых несущественно, обозначать D.

Выбрав числа $d>0$ и $\bar{\delta}>0$ достаточно малыми, будем иметь при всех $k\in\{1,\,2\}$, $z\in(-2d,2d)$, $\varepsilon\in(0,\bar{\delta})^2$

$$0<D^{-1}(\varepsilon_k+z^2)\le P_k(z,s,\varepsilon)\le D(\varepsilon_k+z^2)\,. \tag{3}$$

Зафиксируем d. При достаточно малом $\bar{\delta}$ множество точек в окрестности Γ_k, $k\in\{1,\,2\}$, задаваемое уравнением $z=d$ ($z=-d$) является замкнутой трансверсалью векторного поля X_ε, $\varepsilon\in(0,\bar{\delta})^2$. Обозначим ее $l_k^+(\varepsilon)$ ($l_k^-(\varepsilon)$).

Пусть $s=S_k(z,s_0,\varepsilon)$, $x\in(-2d,2d)$ - решение дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dz}=\frac{1}{P_k(z,s,\varepsilon)}\,,\ k\in\{1,\,2\}\,,$$

удовлетворяющее начальному условию $S_k((-1)^k d,s_0,\varepsilon)=s_0$. Функция $\varphi_k(\cdot,\varepsilon):=S_k((-1)^k d,\cdot,\varepsilon)$ задает диффеоморфизм по траекториям векторного поля $(-1)^{k+1}X_\varepsilon$ трансверсали $l_1^-(\varepsilon)$ на трансверсаль $l_1^+(\varepsilon)$ при $k=1$ и трансверсали $l_2^+(\varepsilon)$ на трансверсаль $l_2^-(\varepsilon)$ при $k=2$.

Уменьшив при необходимости $\bar{\delta}$, будем иметь при $\varepsilon\in(0,\bar{\delta})^2$ следующие утверждения.

Сепаратриса $L_i^-(\varepsilon)$, $i\in\{1,2,...,m\}$ ($L_j^+(\varepsilon)$, $j\in\{1,2,...,n\}$) пересекает трансверсаль $l_1^-(\varepsilon)$ ($l_2^+(\varepsilon)$) в точке с координатой $u_i(\varepsilon)$ ($v_j(\varepsilon)$), где $u_i(\cdot)\in C^1$, $u_i(0)=u_i^0$ ($v_j(\cdot)\in C^1$ $v_j(0)=v_j^0$).

Определено отображение трансверсали $l_1^+(\varepsilon)$ на трансверсаль $l_2^-(\varepsilon)$ по траекториям векторного поля X_ε, имеющее в координатах вид $s\mapsto f(s,\varepsilon)$, где $f\in C^1$, $f(\cdot,0)=f_0$.

6. Оценки производных функции соответствия φ_k.

Покажем, что при достаточно малом $\bar{\delta}>0$ для всех $x\in[-d,d]$, $\varepsilon\in(0,\bar{\delta})^2$, $k\in\{1,\,2\}$

$$-D\varepsilon_k^{-3/2}\le(-1)^{k-1}\partial\varphi_k(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_k\le -D^{-1}\varepsilon_k^{-3/2}\,, \tag{4}$$

$$\left|\partial\varphi_k(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_{\bar{k}}\right|\le D\left|\ln\varepsilon_k\right|\,, \tag{5}$$

$$\left|\partial\varphi_k(s,\varepsilon)/\partial s-1\right|\le D\varepsilon_k^{1/2}\,, \tag{6}$$

$$\left|\partial^2\varphi_k(s,\varepsilon)/\partial s\partial\varepsilon_k\right| \le D\varepsilon_k^{-1}\,, \tag{7}$$

$$\left|\partial^2\varphi_k(s,\varepsilon)/\partial s\partial\varepsilon_{\bar{k}}\right| \le D\varepsilon_k^{1/2}\ln\varepsilon_k\,. \tag{8}$$

Достаточно рассмотреть случай $k=1$. Для краткости будем опускать индекс 1 у функций S_1, P_1, a_1, b_1 и R_1.

Докажем сначала следующие оценки.

$$-D\varepsilon_1^{-3/2} \le \partial S(z,s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_1 \le -D^{-1}\varepsilon_1^{-3/2}\,, \tag{9}$$

$$\left|\partial S(z,s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_2\right| \le D\left|\ln\varepsilon_1\right|. \tag{10}$$

Производная $\partial S/\partial\varepsilon_i$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dz}\partial S/\partial\varepsilon_i = A(z,s,\varepsilon)\partial S/\partial\varepsilon_i + B_i(z,s,\varepsilon)\,,$$

где обозначено

$$A(z,s,\varepsilon) = -(\varepsilon_1^2 a_s'(\theta) + \varepsilon_1 z^2 b_s'(\theta))/P^2(\theta)\,,$$

$$B_1(z,s,\varepsilon) = -(1+\varepsilon_1\,(2a(\theta)+\varepsilon_1 a_{\varepsilon_1}'(\theta)) + z^2(b(\theta)+\varepsilon_1 b_{\varepsilon_1}'(\theta)))/P^2(\theta)\,,$$

$$B_2(z,s,\varepsilon) = -(z^3 R_{\varepsilon_2}'(\theta) + \varepsilon_1^2 a_{\varepsilon_2}'(\theta) + z^2\varepsilon_1 b_{\varepsilon_2}'(\theta)))/P^2(\theta)\,,$$

$$\theta = (z,\, S(z,s,\varepsilon),\, \varepsilon)\,,$$

и начальному условию $\partial S(-d,s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_i = 0$. Поэтому

$$\partial S(z,s,\varepsilon)/\partial\varepsilon_i = \int_{-d}^{z} B_i(\xi,s,\varepsilon)\exp\int_{z}^{\xi} A(\tau,s,\varepsilon)d\tau\, d\xi\,. \tag{11}$$

Из (3) и ограниченности функций a,b,R и их производных получаем

$$\left|A(z,s,\varepsilon)\right| \le D\varepsilon_1(\varepsilon_1+z^2)^{-1}\,, \tag{12}$$

$$-D(\varepsilon_1+z^2)^{-2} \le B_1(z,s,\varepsilon) \le -D^{-1}(\varepsilon_1+z^2)^{-2}\,, \tag{13}$$

$$\left|B_2(z,s,\varepsilon)\right| \le D(\left|z\right|^3 + \varepsilon_1(\varepsilon_1+z^2))(\varepsilon_1+z^2)^{-2}\,. \tag{14}$$

Вычисляя соответствующие интегралы, нетрудно получить следующие оценки

$$0 < \int_{-d}^{d}(\varepsilon_1+z^2)^{-1}dz \le D\varepsilon_1^{-1/2}\,, \tag{15}$$

$$D^{-1}\varepsilon^{-3/2} \le \int_{-d}^{d}(\varepsilon_1+z^2)^{-2}dz \le D\varepsilon_1^{-3/2}\,, \tag{16}$$

$$0 < \int_{-d}^{d} |z|^3 (\varepsilon_1 + z^2)^{-2} dz \le D|\ln \varepsilon_1| . \qquad (17)$$

Оценки (9) и (10), а потому и оценки (4) и (5) следуют теперь из (11)-(17).

Производная $\partial S / \partial s$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dz} \partial S / \partial s = A(z, s, \varepsilon) \partial S / \partial s$$

и начальному условию $\partial S(-d, s, \varepsilon) / \partial s = 1$. Поэтому

$$\partial \varphi_1(s, \varepsilon) / \partial s = \partial S(d, s, \varepsilon) / \partial s = \exp \int_{-d}^{d} A(x, s, \varepsilon) dx . \qquad (18)$$

Поскольку $|\exp t - 1| < 3|t|$ при $|t| \le 1$, то при достаточно малом $\bar{\delta}$ оценка (6) следует из (12), (15) и (18).

Из (18) получаем

$$\partial^2 \varphi_1(s, \varepsilon) / \partial s \partial \varepsilon_i = \int_{-d}^{d} A'_{\varepsilon_i}(x, s, \varepsilon) dx \, \partial \varphi_1(s, \varepsilon) / \partial s . \qquad (19)$$

Вычислив производные A'_{ε_1}, A'_{ε_2}, и используя неравенства (9)-(10) и ограниченность функций a, b, R и их производных, нетрудно получить следующие оценки.

$$\left| A'_{\varepsilon_1}(z, s, \varepsilon) \right| \le D\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + z^2)^{-2} + D\varepsilon_1^{1/2} (\varepsilon_1 + z^2)^{-1} , \qquad (20)$$

$$\left| A'_{\varepsilon_2}(z, s, \varepsilon) \right| \le D\varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + z^2)^{-1} + D\varepsilon_1 |z|^3 (\varepsilon_1 + z^2)^{-2} . \qquad (21)$$

Теперь оценки (7) и (8) вытекают из (20), (21) и (15)-(17).

6. Специальные координаты на плоскости параметров. Обозначим $M_1(\varepsilon) := \varphi_1(u_1(\varepsilon), \varepsilon)$, $M_2(\varepsilon) := \varphi_2(v_1(\varepsilon), \varepsilon)$. Из (4) и (5) следует, что $\bar{\delta}$ можно считать выбранным так, что при всех $\varepsilon \in (0, \bar{\delta})^2$

$$-D(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-3/2} \le \Delta := \det(\partial M_i(\varepsilon) / \partial \varepsilon_j) \le -D^{-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-3/2} < 0 . \qquad (22)$$

и потому отображение $M : (0, \bar{\delta})^2 \to \mathbf{R}^2$, $M(\varepsilon) := (M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon))$, имеет обратное, которое мы обозначим E. Нам будет удобно рассматривать уравнения бифуркационных кривых в координатах $\mu = (\mu_1, \mu_2) = M(\varepsilon)$. Пусть $E(\mu) = (E_1(\mu), E_2(\mu))$. Так как для $i, j \in \{1, 2\}$

$$\partial E_i(\mu) / \partial \mu_j = (-1)^{i+j} (\partial M_k(\varepsilon) / \partial \varepsilon_l) / \Delta \Big|_{\varepsilon = M(\mu)} ,$$

где $k = l = \bar{i}$ при $i = j$ и $k = i$, $l = j$ при $i \ne j$, то с учетом (4)-(5) и (22) получаем

$$\left|\partial E_i(\mu)/\partial\mu_{\bar{i}}\right| \le D\,E_i^{3/2}(\mu)E_{\bar{i}}^{1/2}(\mu),$$

$$0 < D^{-1}E_i^{3/2}(\mu) \le (-1)^i\,\partial E_i(\mu)/\partial\mu_i \le DE_i^{3/2}(\mu)\,. \tag{23}$$

7. Асимптотика функций $\varphi_1(u_i(\varepsilon),\varepsilon)$ и $\varphi_2(v_i(\varepsilon),\varepsilon)$. Покажем, что

$$\varphi_1(u_i(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=E(\mu)} = \mu_1 + u_{1i}^0 + \psi_{1i}(\mu) \quad (i\in\{1,\dots,m\}) \tag{24}$$

$$\varphi_2(v_i(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=E(\mu)} = \mu_2 + v_{1i}^0 + \psi_{2i}(\mu) \quad (i\in\{1,\dots,n\}) \tag{25}$$

где

$$\left|\psi_{ki}(\mu)\right| \le D(E_1(\mu)+E_2(\mu))^{1/2}, \tag{26}$$

$$\left|\partial\psi_{ki}(\mu)/\partial\mu_l\right| \le D(E_1(\mu)+E_2(\mu))^{1/2},\ l\in\{1,2\}. \tag{27}$$

Действительно,

$$\psi_{1i}(\mu) = \varphi_1(u_i(\varepsilon),\varepsilon) - \mu_1 - u_{1i}^0 = (\varphi_1(u_i(\varepsilon),\varepsilon) - \varphi_1(u_1(\varepsilon),\varepsilon)) - u_{1i}^0 =$$
$$u_i(\varepsilon) - u_{1i}^0 + (u_i(\varepsilon) - u_1(\varepsilon))(\partial\varphi_1(\bar{u},\varepsilon)/\partial s - 1)$$

при некотором $\bar{u}\in\mathbf{R}$, и неравенство (26) при $k=1$ следует из (6) и из дифференцируемости и ограниченности функций u_j. Так как

$$\frac{\partial\psi_{1i}}{\partial\mu_l}(\mu) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(u_i(\varepsilon),\varepsilon)\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u_i}{\partial\varepsilon_k}(\varepsilon)\frac{\partial E_k}{\partial\mu_l}(\mu) +$$
$$+\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(u_1(\varepsilon),\varepsilon)\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial u_1}{\partial\varepsilon_k}(\varepsilon)\frac{\partial E_k}{\partial\mu_l}(\mu) +$$
$$+(u_i(\varepsilon)-u_1(\varepsilon))\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial s\partial\varepsilon_k}(\bar{u},\varepsilon)\frac{\partial E_k}{\partial\mu_l}(\mu),$$

при некотором $\bar{u}\in\mathbf{R}$, то неравенство (27) при $k=1$ следует из (6), (7) и ограниченности функций u_j и их производных.

При $k=2$ оценки (26) и (27) доказываются аналогично.

8. Уравнения бифуркационных кривых. Обозначим для $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $p\in\mathbf{Z}$, $\mu\in M(0,\delta)^2$

$$F_{ij}^p(\mu) := \mu_2 + v_{1j}^0 - f_0(\mu_1 + u_{1i}^0) - p,$$

$$\tilde{F}_{ij}^p(\mu) := [\varphi_2(v_j(\varepsilon),\varepsilon) - f(\varphi_1(u_i(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)]_{\varepsilon=E(\mu)} - p,$$

$$G_{ij}(\mu) := \tilde{F}_{ij}^p(\mu) - F_{ij}^p(\mu).$$

Уравнения $F_{ij}^{p}(\mu)=0$ задают связные компоненты множества M_{ij}, а уравнения $\widetilde{F}_{ij}^{p}(\mu)=0$ бифуркационные кривые.

Лемма. *Для любого* $\nu>0$ *найдется сколь угодно малое* $\delta>0$, *такое, что при всех* $i\in\{1,...,m\}$, $j\in\{1,...,n\}$, $\mu\in M(0,\delta)^2$

$$\left|G_{ij}(\mu)\right|<\nu\,, \tag{28}$$

$$\left|\partial G_{ij}(\mu)/\partial\mu_l\right|<\nu \quad (l\in\{1,\,2\})\,. \tag{29}$$

Доказательство. Зададим $\nu>0$. Используя (24) и (25), получаем

$$G_{ij}(\mu)=\psi_{2j}(\mu)-(f(\mu_1+u_{1i}^0+\psi_{1i}(\mu),E(\mu))-f(\mu_1+u_{1i}^0,0))\,.$$

Поэтому при достаточно малом $\delta>0$ неравенство (28) следует из (26) и равномерной непрерывности f. Так как

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial\mu_1}(\mu)=\frac{\partial\psi_{2j}}{\partial\mu_1}(\mu)-\frac{\partial f}{\partial s}(\mu_1+u_{1i}^0+\psi_{1i}(\mu),E(\mu))\frac{\partial\psi_{1i}}{\partial\mu_1}(\mu)-$$
$$-(\frac{\partial f}{\partial s}(\mu_1+u_{1i}^0+\psi_{1i}(\mu),E(\mu))-\frac{\partial f}{\partial s}(\mu_1+u_{1i}^0,\,0))+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_k}(\mu_1+u_{1i}^0+\psi_{1i}(\mu),E(\mu))\frac{\partial E_k}{\partial\mu_1}(\mu)\,,$$

то при достаточно малом δ неравенство (29) для $l=1$ следует из (23), (26), (27) и из равномерной непрерывности и ограниченности производных функции f. Изменения, которые надо внести в доказательство неравенства (29) при $l=2$, очевидны.

В силу неравенств (23) и теоремы о неявной функции

$$E_1(\mu)=\delta\,,\;\; 0<E_2(\mu)<\delta\Leftrightarrow\mu_1=g_2(\mu_2),\;\; \mu_2\in(-\infty,\,\mu_2^*)\;\;,$$

$$E_2(\mu)=\delta\,,\;\; 0<E_1(\mu)<\delta\Leftrightarrow\mu_2=g_1(\mu_1),\;\; \mu_1\in(\mu_1^*,\infty)\;\;,$$

где g_1 и g_2 - C^1-функции, для которых абсолютные величины производных можно сделать сколь угодно малыми за счет уменьшения δ. Теперь $M(0,\delta)^2=\{(\mu_1,\mu_2):\mu_1>g_2(\mu_2),\,\mu_2<g_1(\mu_1)\}$.

Обозначим $\gamma_{ij}^{p}(\mu_1):=-v_{1j}^0+p+f(\mu_1+u_{1i}^0,0)$. Рассмотрим случай $X_0\in C_{12}$. Тогда $f_s'(\mu_1+u_{1i}^0,0)<0$ и потому при достаточно малом δ $F_{ij}^{p}(\mu)=0$, $\mu\in M(0,\delta)^2\Leftrightarrow\;\mu_2=\gamma_{ij}^{p}(\mu_1),\quad \mu_1\in(\,\mu_{ij}^{p},\infty)$.

Так как по предположению уравнения $f_{ijkl}(s)=0$ имеют только простые корни, то кривые $F_{ij}^{p}(\mu)=0$ и $F_{kl}^{q}(\mu)=0$ имеют только трансвер-

сальные пересечения. Точек пересечения, если они имеются, счетное число. Потому δ можно выбрать так, чтобы эти точки не принадлежали границе множества $M(0,\delta)^2$.

Семейство кривых $F_{ij}^p(\mu)=0$ получается сдвигами из конечного числа замкнутых дуг $\mu_2=\gamma_{ij}^0(\mu_1),\ \ \mu_1\in[0,1]$. Поэтому из леммы по теореме о неявной функции следует, что по любому числу $\theta>0$ можно выбрать δ так, что для любых $i\in\{1,...,m\}$, $j\in\{1,...,n\}$, $p\in\mathbf{Z}$

$$\tilde{F}_{ij}^p(\mu)=0\ ,\ \mu\in M(0,\delta)^2 \Leftrightarrow \mu_2=\tilde{\gamma}_{ij}^p(\mu_1),\quad \mu_1\in(\tilde{\mu}_{ij}^p,\infty)\ ,$$

где

$$\tilde{\gamma}_{ij}^p\in C^1\ ,\ \left|\tilde{\gamma}_{ij}^p(\mu_1)-\gamma_{ij}^p(\mu_1)\right|+\left|(\tilde{\gamma}_{ij}^p)'(\mu_1)-(\gamma_{ij}^p)'(\mu_1)\right|<\theta .$$

При достаточно малом θ нетрудно построить C^1 – диффеоморфизм $\eta: M(0,\delta)^2\to M(0,\delta)^2$, переводящий кривые $\mu_2=\tilde{\gamma}_{ij}^p(\mu_1)$, $\mu_1\in(\tilde{\mu}_{ij}^p,\infty)$, в кривые $\mu_2=\gamma_{ij}^p(\mu_1),\ \ \mu_1\in(\mu_{ij}^p,\infty)$. Теперь $\varphi:=\eta\circ M$ - диффеоморфизм, о котором идет речь в теореме.

В случае $X_0\in C_{11}$ доказательство аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* О двухпараметрических бифуркациях на поверхностях // VIII конференция СНГ «Качественная теория дифференциальных уравнений». Самарканд, 1992. С. 95.
2. *Ройтенберг В.Ш.* О некоторых глобальных бифуркациях в двухпараметрических семействах векторных полей на поверхностях // Деп. в ВИНИТИ, 1995, № 887 – 95. 28 с.
3. *Malta I.R., Palis J.* Families of vector fields with finite modulus of stability // Lect. Notes Math. 1981. V. 898. P. 212-226.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях сепаратрис, предельных к двойному циклу// Деп. в ВИНИТИ, 1995, № 888 – 95. 21 с.
5. *Ройтенберг В.Ш.* О нелокальных бифуркациях векторных полей на бутылке Клейна // Труды третьих Колмогоровских чтений. –Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. С. 195-202.
6. *Newhaus S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorfisms // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5 – 71.
7. *Бородин А.В.* О вложении диффеоморфизма класса C^3 в векторное поле // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. научн. тр. Вып. 2. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2001. С. 14-37.