http://www.dyn-sys.org

Просеминар «Динамические системы», 11.11.2011 и 18.11.2011
Задачи к лекциям В. Клепцына

Задача 1. При каких a и b неподвижная точка $x = 0$ отображения

$$f(x) = -x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$$

будет притягивающей? отталкивающей? Где, в предположении малости старших членов, будут расположены близкие к 0 периодические точки?

Задача 2. Нарисуйте фазовый портрет дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 0.1((x^2 + y^2 - 1)^2 - a)x, \\ \dot{y} = x + 0.1((x^2 + y^2 - 1)^2 - a)y \end{cases}$$

в зависимости от малого параметра a. Опишите происходящую при $a = 0$ бифуркацию.

Задача 3. Как должна быть устроена седлоузловая бифуркация или бифуркация удвоения периода для отображений в размерности, большей 1?

Задача 4. Может ли происходить бифуркация удвоения периода для динамических систем с непрерывным временем (т.е. для векторных полей)? Если да — в пространствах и на многообразиях какой размерности?

Задача 5. Как устроен типичный[1] диффеоморфизм отрезка, сохраняющий ориентацию?

Задача 6. Докажите, что отображение $x \mapsto 4x(1-x)$ полусопряжено отображению tent map $x \mapsto |2x - 1|$ и является фактором отображения удвоения окружности $\varphi \mapsto 2\varphi$.
Указание. Сделайте замену переменной $y = 2x - 1$ и вспомните, как определяются многочлены Чебышева.

[1] Для решения этой задачи — выберите то определение типичности, которое наиболее для вас удобно.