http://www.dyn-sys.org

Просеминар «Динамические системы», 28.10.2011

Ю. Кудряшов, «Векторные поля на поверхностях»

Задача 1. Нарисуйте, как устроены траектории следующих векторных полей:

(a) $\vec{v}(x, y) = (1, 0)$;
(b) $\vec{v}(x, y) = (x, y)$ (*узел*);
(c) $\vec{v}(x, y) = (x, 2y)$ (*узел*);
(d) $\vec{v}(x, y) = (x, -y)$ (*седло*);
(e) $\vec{v}(x, y) = (y, -x)$ (*центр*);
(f) $\vec{v}(x, y) = (x - y, x + y)$ (*фокус*);
(g) $\vec{v}(x, y) = (x^2, y)$ (*седлоузел*);
(h) $\vec{v}(x, y) = (1, -\sqrt{|y|} \cdot \operatorname{sign}(y))$.

Задача 2. Нарисуйте векторное поле на плоскости, у которого ровно
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 4 (f) счётное число особых точек.

Задача 3. Придумайте векторное поле на сфере, у которого ровно (a) 2; (b) 1 особая точка.

Задача 4. Придумайте векторное поле на торе, у которого ровно (a) 0; (b) 2; (c) 4; (d) 1 особая точка.

Задача 5. Придумайте векторное поле в кольце без особых точек, такое что на внешней окружности все точки движутся против часовой стрелки, а на внутренней — по часовой.

Определение 1. Пусть дано векторное поле v на плоскости и замкнутая кривая γ, не проходящая через особые точки векторного поля. Тогда *индексом кривой γ относительно поля v* называется число оборотов, которое делает вектор векторного поля при обходе кривой (обороты считаются с учётом направления). Обозначение: $\operatorname{ind}(v, \gamma)$.

Задача 6. Найдите индекс единичной окружности относительно полей из задачи 1 (единичная окружность проходится против часовой стрелки).

Задача 7. Докажите, что если *продеформировать* (т. е. немного изменить) кривую, не задевая особых точек, то индекс не изменится.

Задача 8. Докажите, что если кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ограничивает диск, в котором нет особых точек векторного поля v, то $\operatorname{ind}(v, \gamma) = 0$.

Особая точка векторного поля называется *изолированной*, если у неё есть окрестность, в которой нет других особых точек.

Определение 2. *Индексом изолированной особой точки a* векторного поля v (обозначение: $\operatorname{ind}(v, a)$) называется индекс маленькой окружности, обходящей особую точку a в положительном направлении (против часовой стрелки), относительно векторного поля v.

Задача 9. Докажите, что определение корректно, т. е. не зависит от выбора окружности.

Задача 10. Пусть кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ограничивает область U. Тогда индекс этой кривой равен сумме индексов особых точек векторного поля, лежащих в U.

Задача 11. (a) Внутри любой замкнутой траектории векторного поля на плоскости обязательно есть хотя бы одна особая точка.

(b) Какие из перечисленных в задаче 1 особых точек могут быть единственными особыми точками внутри замкнутой траектории?

Задача 12 (Теорема о непричёсываемости ежа)**.** Докажите, что у векторного поля на сфере всегда есть особая точка.

Задача 13. Найдите индекс нуля относительного векторного поля (a) $\dot{z} = z^n$, $n > 0$; (b) $\dot{z} = \bar{z}^n$, $n > 0$.

Задача 14 (Теорема Руше)**.** Даны два векторных поля v и u и кривая γ. Если $|v| > |u|$ во всех точках кривой γ, то $\operatorname{ind}(\gamma, v) = \operatorname{ind}(\gamma, v + u)$.

Задача 15 (Основная теорема алгебры)**.** Любой многочлен $P \in \mathbb{C}[x]$ степени хотя бы 1 имеет (a) хотя бы один комплексный корень; (b) ровно $\deg P$ комплексных корней с учётом кратностей.