http://www.dyn-sys.org

Просеминар «Динамические системы»

Задачи к экзамену

1. Вычислите координаты точки соленоида по заданной судьбе.

2. Докажите, что соленоид локально гомеоморфен произведению канторовского множества на отрезок.

3. Рассмотрим множество $M_N = \frac{1}{N}\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (то есть множество точек тора, у которых обе координаты являются дробями со знаменателем N). Рассмотрим ограничение отображения $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ на M_N. Пусть $P = P(N) \in \mathbb{N}$ — период этого отображения, то есть $(A|_{M_N})^{P(N)}$ является тождественным отображением.

   а) Докажите, что $P(N) \leq N^4$.

   б) Докажите, что $P(N) \leq N^3$.

4. Пусть матрица A целочисленна, её определитель равен 1, и матрица A имеет два различных положительных собственных вектора с иррациональными собственными значениями. Постройте марковское разбиение для отображения тора, заданного матрицей A.

5. Пусть площади прямоугольников марковского разбиения $P_0, \dots P_4$ для отображения $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ двумерного тора равны $S_0, \dots S_4$. Пусть площади пересечений $A(P_i) \cap P_j$ равны S_{ij}. Найдите площадь множества точек, для которых:

   а) судьба начинается с 01;

   б) вторая и третья цифра судьбы – 0 и 1;

   в) судьба начинается с 010;

   г) судьба начинается с $a_1 a_2 \dots a_k$.

6. Докажите, что у множества Мандельброта гиперболическая компонента каждого периода — открытое множество.

7. Выпишите уравнения для гиперболических компонент множества Мандельброта

   а) периода 1 (главная кардиоида);

   б) периода 2.

8. Пусть у векторного поля на сфере с g ручками есть только одна особая точка.

   а) Какой индекс у этой точки?

   б) Постройте такое векторное поле для любого g.

9. Как должна быть устроена седлоузловая бифуркация или бифуркация удвоения периода для отображений в размерности, большей 1?

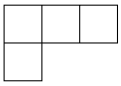
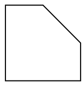
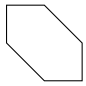
10. Может ли происходить бифуркация удвоения периода для динамических систем с непрерывным временем (т.е. для векторных полей)? Если да — в пространствах и на многообразиях какой размерности?

11. Как устроен типичный[1] диффеоморфизм отрезка, сохраняющий ориентацию?

12. Докажите, что отображение $x \mapsto 4x(1-x)$ полусопряжено отображению tent map $x \mapsto |2x-1|$ и является фактором отображения удвоения окружности $\varphi \mapsto 2\varphi$.

    Указание. Сделайте замену переменной $y = 2x - 1$ и вспомните, как определяются многочлены Чебышева.

13. Выясните, какая поверхность с плоской структурой соответствует следующему бильярду.

    а)  б)  в) 

14. Найдите углы в конических особенностях для поверхностей из предыдущей задачи.

15. Опишите движение шарика по бильярду из задачи 13а) в заданном направлении с помощью перекладывания отрезков.

16. Докажите, что удвоение окружности эргодично.

17. а) Приведите пример отображения, у которого есть две эргодические меры.

    б) В теореме Биркгофа-Хинчина левая часть не зависит от меры, а правая — зависит. Как же тогда у одного отображения могут быть две разные эргодические меры?

18. Рассмотрим отображение цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ в себя: $T\colon (x, y) \to (2x, \lambda(x)y)$. (то есть по окружности происходит удвоение окружности, а по прямой — растяжение в $\lambda(x)$ раз). Пусть $\int_0^{2\pi} \ln \lambda(x) dx < 0$.

    а) Докажите, что для почти всех значений x последовательность точек $T^n(x, y)$ стремится к окружности[2] $S^1 \times \{0\}$.

    б) Пусть $\lambda(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x$. Проверьте условие $\int_0^{2\pi} \ln \lambda(x) dx < 0$ для такой функции $\lambda(x)$. Найдите счётное множество значений x, для которых точка (x, y) под действием T^n не стремится к окружности $S^1 \times \{0\}$.

    г) Найдите континуальное множество таких значений x.

[1] Для решения этой задачи выберите то определение типичности, которое наиболее для вас удобно.

[2] Другими словами, $S^1 \times \{0\}$ — аттрактор Милнора для отображения T.