http://www.dyn-sys.org

Просеминар «Динамические системы», 2.12.2011

О. Ромаскевич, «Перемешивание и эргодичность. Задачи.»

1 Основы теории меры

Рассмотрим некоторое множество X (например, фазовое пространство какой-нибудь динамической системы). Набор его подмножеств K называется *кольцом*, если вместе с любыми двумя множествами A, B он содержит их пересечение $A \cap B$ и симметрическую разность $A \setminus B$. Единицей такого кольца называется множество E, для которого $A \cap E = A$ при любом $A \in K$. В дальнейшем мы будем рассматривать только кольца с единицей.

Нашим основным примером кольца будет кольцо, порождённое набором всех интервалов вида $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) на отрезке вещественной прямой. Такое кольцо содержит все интервалы и всевозможные конечные объединения и пересечения интервалов.

Аддитивной мерой на кольце K называется функция μ на множествах $A \in K$, для которой

- $\mu(A) \geq 0$;
- для непересекающихся множеств A и B выполнено $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

при этом меру, тождественно равную нулю на всех множествах, мы рассматривать не будем.

Аддитивная мера μ называется сигма-аддитивной, если для любого счетного набора непересекающихся множеств A_n выполнено равенство $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum \mu(A_n)$ (при условии, что объединение $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ принадлежит кольцу).

Если мера на кольце сигма-аддитивна, её можно продолжить на более широкий класс множеств. Для этого в кольцо K надо добавить всевозможные счётные объединения его элементов, потом пересечения и симметрические разности всех добавленных множеств, потом счётные объединения всех полученных множеств... и так далее, пока набор множеств A, который у нас получится, не будет удовлетворять таким условиям:

- Набор A является кольцом с единицей;
- Набор A вместе с любым счетным набором множеств A_n содержит их счётное объединение $\cup A_n$.

Такой набор множеств A называется сигма-алгеброй.

Оказывается, если у нас была сигма-аддитивная мера на кольце с единицей, её всегда можно продолжить на сигма-алгебру, полученную из кольца K. Меру на сигма-алгебре мы и будем называть мерой, а все множества из сигма-алгебры — измеримыми.

При этом не все подмножества X измеримы. На лекции был построен пример множества, которое не может быть измеримо.

1.1 Примеры мер и сигма-алгебр

Мера является некоторым обобщением длины на прямой или площади — на плоскости; поэтому для кольца всевозможных объединений и пересечений интервалов на прямой можно положить $\mu((a,b)) = b-a$. Такую меру можно будет определить на конечных объединениях и пересечениях интервалов (с помощью аддитивности) и потом продолжить на более широкий класс множеств, который называется борелевской сигма-алгеброй B. Полученная мера называется мерой Лебега на отрезке.

Если вместо отрезка прямой взять кусок плоскости, вместо интервалов — прямоугольники, а меру на прямоугольниках определить как площадь прямоугольника, то после такого продолжения получится мера Лебега на плоскости. На непатологических множествах она совпадает с обычной площадью.

Можно рассмотреть меру на отрезке, имеющую плотность $p(x)$. Тогда надо положить $\mu([a,b]) = \int_a^b pdx$; если представлять себе, что отрезок изготовлен из материала, имеющего плотность $p(x)$ в точке x, то мера — это масса множества. Аналогичным образом меру с плотностью можно определить и на плоскости.

Можно рассмотреть дельта-меру на отрезке. Для этого надо выбрать на отрезке точку x и положить $\mu(\{x\}) = 1$, а меру остальной части отрезка $I \setminus \{x\}$ взять равной нулю. Можно представлять себе, что на невесомом отрезке есть материальная точка массы 1, расположенная в точке x. Тогда мера любого множества $A \subset I$ будет равна 1, если $x \subset A$, и 0 в противном случае.

1.2 Инвариантные меры

Пусть на множестве X есть сигма-алгебра A и соответствующая мера μ (мы будем говорить, что задано пространство с мерой (X, A, μ)). Пусть, кроме того, на множестве X действует отображение T. Как это отображение действует на меру?

Пусть, например, мера на отрезке имеет плотность (отрезок изготовлен из неоднородного материала, а мера — это масса). Тогда под действием отображения масса перераспределяется и плотность меняется. Новая масса множества A — это масса его прообраза $T^{-1}(A)$.

Поэтому естественно дать такое определение:

Отображение T действует на меру, переводя меру μ в меру $(T^*\mu)$: $T^*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. При этом требуется, чтобы все множества $T^{-1}A$ принадлежали сигма-алгебре A (иначе $\mu(T^{-1}A)$ будет не определено).

Важная характеристика отображения — это набор мер, которые оно сохраняет.

Мера μ называется инвариантной относительно отображения T, если $T^*\mu = \mu$ (то есть $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$).

1.3 Перемешивание.

Здесь и далее меру множества X мы считаем равной единице (такие меры называются вероятностными).

Нальём каплю молока (множество A) в чашку с чаем (множество X). Возьмем отображение T — один оборот ложки в чашке. Применим это отображение n раз. При достаточно большом n молоко смешается с чаем. Это значит, что если мы зачерпнем ложку чая в любом месте чашки (множество $B \subset X$), то доля молока в этой ложке будет такая же, как и доля молока во всей чашке.

Если мера — это объем множества, то мы получим, что $\mu(A)$ (доля молока в чашке) примерно равна $\frac{\mu(T^n(A)\cap B)}{\mu(B)}$ (доля молока в ложке). Другими словами, $\mu(T^n(A) \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ при $n \to \infty$.

Определение 1. Если для отображения T и инвариантной меры μ для любых измеримых множеств A, B выполнено $\lim_{n\to\infty} \mu(T^n(A)\cap B) \to \mu(A)\mu(B)$, то это отображение называются перемешивающим.

1.4 Эргодичность.

Отображение называется эргодичным, если любое инвариантное множество $A, T(A) = A$, из сигма-алгебры имеет меру либо 0, либо 1 (нет инвариантных множеств промежуточной меры).

Если отображение не эргодично (то есть существует такое множество A промежуточной меры), то его можно разбить на два: отдельно рассмотреть его ограничение на A и на его дополнение. Поэтому эргодичные отображения в каком-то смысле самые простые.