Алгебра и анализ
Том 22 (2010), №4

ЦИКЛИЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОЛИЦИКЛОВ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ТИПИЧНЫХ k-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВАХ

© П. И. КАЛЕДА, И. В. ЩУРОВ

Работа посвящена нахождению оценки числа предельных циклов, рождающихся из полициклов в типичных конечно-параметрических семействах дифференциальных уравнений на двумерной сфере. Доказано, что для полициклов с фиксированным числом особых точек в случае, когда все особые точки элементарны, выполняется оценка цикличности, полиномиальная по числу параметров семейства.

§1. Введение и формулировка основного результата

1.1. Мотивация и предшествующие результаты. В этой статье мы будем обсуждать *проблему Гильберта–Арнольда*, тесно связанную с 16-й проблемой Гильберта. В последней требуется оценить число предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости. В. И. Арнольд предложил [1] рассматривать не полиномиальные семейства, а произвольные *типичные*[1] конечно-параметрические семейства гладких дифференциальных уравнений на двумерной сфере с компактной базой параметров и сформулировал ряд гипотез. Одна из них, хотя и оказалась сама неверной, подвела Ю. С. Ильяшенко [2] к формулировке следующей проблемы: *показать, что для всякого такого семейства число предельных циклов допускает равномерную оценку по всем значениям параметра.* Пользуясь соображениями компактности, восходящими к Р. Руссари [7], можно показать, что эта проблема сводится к оценке числа циклов, рождающихся при бифуркациях так называемых *полициклов*, т.е. сепаратрисных многоугольников. Эта задача и называется (локальной) проблемой Гильберта–Арнольда (см. формулировку проблемы 1).

Строгие определения и постановка задачи приведены ниже.

Ключевые слова: число предельных циклов, полицикл, шестнадцатая проблема Гильберта, проблема Гильберта–Арнольда.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 7-01-00017-а и РФФИ/CNRS 05-01-02801-CNRSa.

[1] Типичность понимается здесь в топологическом смысле.

Определение 1.1. *Полициклом* γ векторного поля на сфере $\mathbb{S}^2$ называется циклически пронумерованный набор вершин, т.е. особых точек $p_1, \ldots, p_n$ (возможно, с повторениями), и дуг траекторий $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (без повторений), соединяющих вершины в следующем порядке: j-я дуга соединяет вершину p_j с вершиной p_{j+1}, где $j = 1, \ldots, n$ и $p_{n+1} := p_1$.

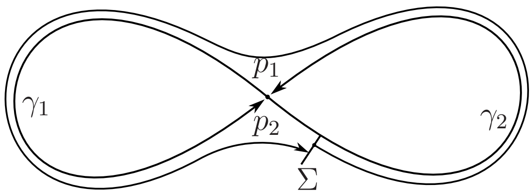


Рис. 1. Полицикл и отображение Пуанкаре.

Полицикл называется *нетривиальным*, если он содержит хотя бы одну особую точку. Максимальное число циклов, которые могут родиться из возмущения данного полицикла, называется его *цикличностью*. Строгое определение таково.

Определение 1.2. Рассмотрим k-параметрическое семейство векторных полей на сфере $\{\dot{x} = v(x, \varepsilon)\}_{\varepsilon \in B^k}$, $x \in \mathbb{S}^2$, где B^k — единичный шар в $\mathbb{R}^k$. Пусть при $\varepsilon = \varepsilon_* \in B^k$ система имеет полицикл γ. Пусть μ — минимальное из таких чисел, при которых существуют такие окрестности U и V, что $\mathbb{S}^2 \supseteq U \supset \gamma$, $B^k \supseteq V \ni \varepsilon_*$ и для любого $\varepsilon \in V$ поле $v(\cdot, \varepsilon)$ имеет не более μ предельных циклов внутри U. Тогда μ называется *цикличностью* полицикла γ в семействе $\{v(x, \varepsilon)\}_{\varepsilon \in B^k}$.

Определение 1.3. *Бифуркационным числом* $B(k)$ называется максимальная цикличность нетривиального полицикла в типичном k-параметрическом семействе C^∞-гладких векторных полей.

Заметим, что число $B(k)$ зависит только от числа параметров семейства.

Проблема 1 (проблема Гильберта–Арнольда). Доказать, что для любого конечного k бифуркационное число $B(k)$ конечно, и найти для него верхнюю оценку.

Данная проблема остается открытой.

Определение 1.4. Особая точка векторного поля v на сфере $\mathbb{S}^2$ называется *элементарной*, если линеаризация v в этой точке имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение. Полицикл называется *элементарным*, если все его вершины являются изолированными элементарными особыми точками.

Для случая элементарного полицикла проблема Гильберта–Арнольда была решена. Первый шаг был сделан Ю. Ильяшенко и С. Яковенко. Следующий шаг был сделан В. Калошиным.

Определение 1.5. Максимальная цикличность нетривиального элементарного полицикла в типичном k-параметрическом семействе C^∞-гладких векторных полей называется *элементарным бифуркационным числом* и обозначается через $E(k)$.

Теорема 1.6 (Y. Ilyashenko, S. Yakovenko [4]). *Для любого натурального k число $E(k)$ конечно.*

Теорема 1.7 (V. Kaloshin [5]). *Для любого натурального k*

$$E(k) \leqslant 2^{25k^2}. \tag{1.1}$$

Теорема 1.7 дает первую явную оценку на цикличность полицикла в семействе с произвольным числом параметров. Однако оценка (1.1) выглядит сильно завышенной.

1.2. Формулировка основного результата статьи. Оказывается, что при фиксированном числе особых точек системы цикличность растет не быстрее некоторого полинома от числа параметров семейства. Основным результатом данной статьи является теорема 1.8, которая предлагает явную оценку такого вида.

Теорема 1.8. *Максимальная цикличность нетривиального элементарного полицикла с n вершинами в типичном k-параметрическом семействе ограничена числом*

$$E(n,k) \leqslant C(n)k^{3n},$$

где $C(n) = 2^{5n^2+20n}$.

В данной работе мы используем технику, разработанную Ю. Ильяшенко совместно с С. Яковенко [4] и существенно доработанную В. Калошиным [5].

1.3. Структура статьи. В §2 даны описание стратегии решения задач такого типа и необходимые формулировки. П. 2.7 проясняет отличие техники, разработанной В. Калошиным, от техники Ю. Ильяшенко и С. Яковенко. Здесь же указана основная идея, которая позволила авторам данной работы получить более точные оценки и доказать теорему 1.8. Наконец, в §3 приведены необходимые выкладки.

Авторы хотели бы выразить свою благодарность профессору Ю. Ильяшенко за поставленную задачу и помощь в работе, профессору В. Калошину за консультации, а также Д. Рыжову за прочтение рукописи и ценные замечания по тексту.

§2. Существование и оценка числа $E(n, k)$

Полное описание техники решения задач подобного типа выходит за рамки данной статьи; его можно найти в работах [5] и [4]. В этом параграфе мы *описываем* стратегию доказательства, следуя в основном указанным выше статьям.

2.1. План доказательства. Рассмотрим типичное k-параметрическое семейство векторных полей на плоскости, зависящее от параметра ε, и пусть при $\varepsilon = \varepsilon_*$ соответствующая система имеет нетривиальный полицикл. С помощью стандартного приема — перехода к *отображению Пуанкаре* — задача об оценке числа предельных циклов дифференциального уравнения сводится к оценке числа изолированных неподвижных точек этого отображения (см. п. 2.2). Мы будем искать неподвижные точки как решения специальной системы уравнений, называемой *базисной системой* (она также зависит от параметра ε). Дальнейший план состоит в том, чтобы путем ряда последовательных трансформаций привести базисную систему к виду, допускающему эффективную оценку числа решений, контролируя при этом оценку на число решений при каждой трансформации (рис. 2).

С помощью конечно-гладких замен координат исходное семейство векторных полей можно привести к специальному простому виду в окрестностях особых точек, что позволяет записать уравнения, входящие в базисную систему, в нормализованном виде (см. п. 2.3).

Эти уравнения содержат сингулярные функции, которые трудны для исследования. Однако решения таких уравнений, в свою очередь, удовлетворяют так называемым *пфаффовым уравнениям*, т.е. дифференциальным уравнениям с *полиномиальными коэффициентами* (см. п. 2.4), и, таким образом, число решений базисной системы оценивается через число решений новой *функционально-пфаффовой* системы, в которой уравнения с сингулярными функциями заменены на пфаффовы дифференциальные уравнения. Это позволяет избавиться от сингулярных функций.

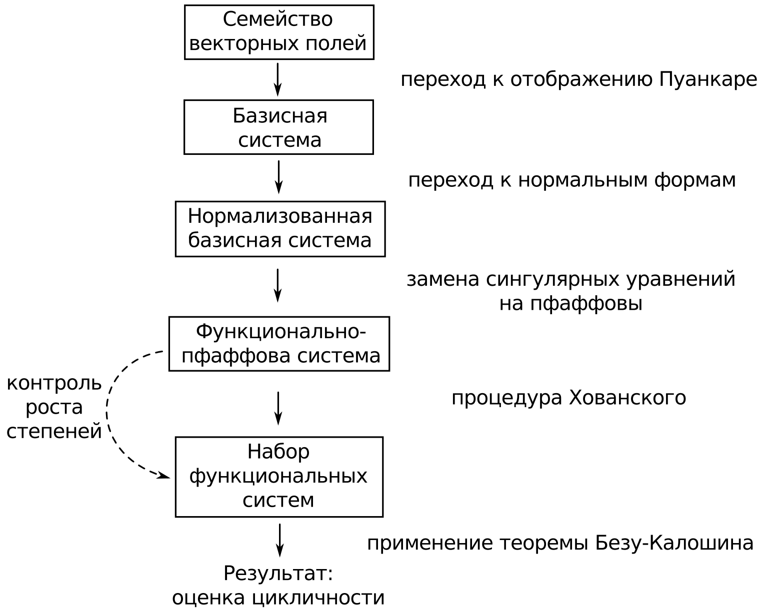


Рис. 2. Стратегия доказательства.

Далее используется прием, известный как *редукция Хованского.* В результате его применения функционально-пфаффова система заменяется на (конечный) набор чисто функциональных систем, имеющих специальный вид и не содержащих сингулярных уравнений, причем число решений исходной системы не превосходит суммы чисел решений систем этого набора (см. п. 2.5).

К таким системам применим аналог теоремы Безу — теорема Безу–Калошина, позволяющая оценить число их решений в явном виде, а вместе с ним и число предельных циклов в исходном семействе (см. п. 2.6).

Для завершения доказательства останется лишь подсчитать степени уравнений в тех системах, к которым применяется теорема Безу–Калошина, что описано в §3.

2.2. Базисная система. Обозначим через n число вершин нетривиального элементарного полицикла, а через k — число параметров семейства. Наша задача состоит в том, чтобы оценить число предельных циклов, рождающихся из данного полицикла, через n и k.

Полицикл γ называется *монодромным*, если можно выбрать некоторый полуинтервал Σ в фазовом пространстве, одним концом лежащий на полицикле, трансверсальный к векторному полю, и такой, что на нем будет определено *отображение Пуанкаре* (отображение первого возвращения; см. рис. 3). Такой полуинтервал кратко называется *трансверсалью*.

Предположим, что полицикл монодромный.[2] Рассмотрим его отображение Пуанкаре Π.

Пусть Σ_j^{in} и Σ_j^{out} — такие трансверсали к полициклу в окрестности j-й вершины ($j = 1, \dots, n$), что для них определены отображения соответствия $\Delta_j : \Sigma_j^{\mathrm{in}} \to \Sigma_j^{\mathrm{out}}$ и $f_j : \Sigma_j^{\mathrm{out}} \to \Sigma_{j+1}^{\mathrm{in}}$ (здесь $\Sigma_{n+1}^{\mathrm{in}} := \Sigma_1^{\mathrm{in}}$), а отображение Π разбивается в композицию $\Pi = f_n \circ \Delta_n \circ \cdots \circ f_1 \circ \Delta_1$ (рис. 3).

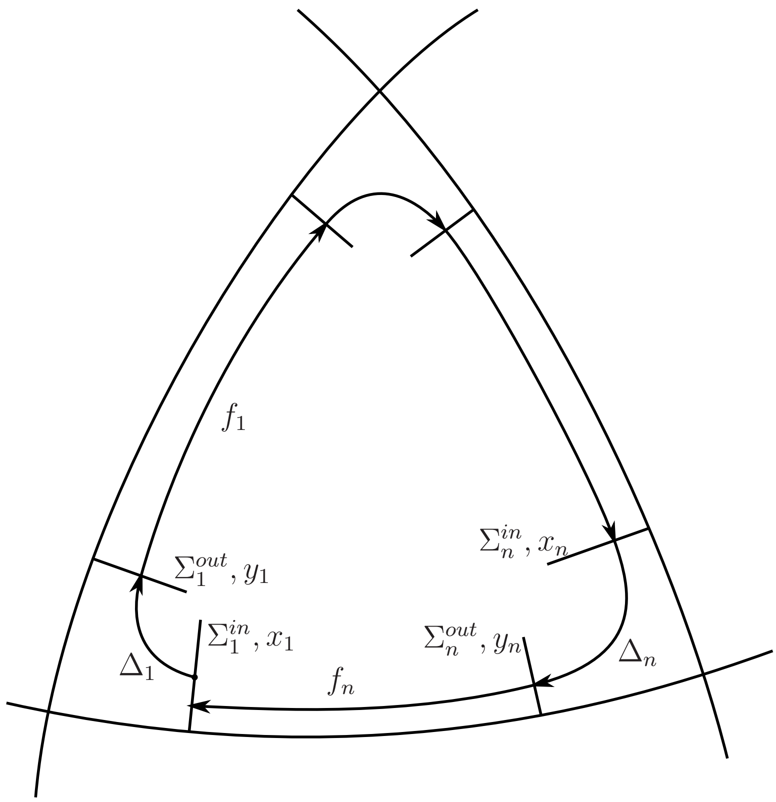


Рис. 3. Отображение Пуанкаре полицикла.

Если при возмущении из полицикла рождаются замкнутые траектории, то они соответствуют неподвижным точкам отображения Π. Их можно

[2]Замечание 2.9 переносит построение на случай немонодромных полициклов.

найти как решения *базисной системы*:

$$\begin{cases} y_j = \Delta_j(x_j, \varepsilon), \\ x_{j+1} = f_j(y_j, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{n+1} = x_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

где x_j — координата на ,,входной“ трансверсали Σ_j^{in} j-й вершины, y_j — координата на ,,выходной“ трансверсали Σ_j^{out} j-й вершины, $\varepsilon{=}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ — вектор параметров.

2.3. Нормальные формы локальных семейств. Если элементарный полицикл может породить предельные циклы, то из топологических соображений следует, что особые точки на нем — только седла и седлоузлы. Локальные семейства, представляющие собой возмущения седел и седлоузлов, с помощью конечно-гладких замен переменных приводятся к *нормальным формам*, описанным в [3]. В этом параграфе мы сформулируем необходимые факты.

Седла делятся на два класса, имеющие различные нормальные формы: *резонансные* и *нерезонансные*; первый случай соответствует рациональному соотношению $\frac{\mathsf{n}}{\mathsf{m}}$ собственных значений (в этом случае говорят о резонансе $\mathsf{n} : \mathsf{m}$), второй — иррациональному.

Пусть μ — некоторое натуральное число, а $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_\mu)$ — многомерный параметр. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} u &= x^m y^n, \\ P_\mu(u, \lambda) &= \pm u^\mu(1 + \lambda_\mu u^\mu) + W_{\mu-1}(u, \lambda), \\ Q_\mu(x, \lambda) &= x^{\mu+1} + \lambda_\mu x^{2\mu+1} + W_{\mu-1}(x, \lambda), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$W_{\mu-1}(x, \lambda) = \lambda_0 + \dots + \lambda_{\mu-1} z^{\mu-1}.$$

В конечно-параметрическом семействе векторных полей нормальная форма резонансного седла имеет вид (см. [4, табл. 1])

$$\begin{cases} \dot{x} = x\Big(\frac{\mathsf{n}}{\mathsf{m}} + P_\mu(u, \lambda)\Big), \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \tag{2.3}$$

Число μ зависит от исходного седла и называется *кратностью вырождения* этого седла; сёдла с кратностью вырождения μ мы будем обозначать символом S_μ.

Замечание 2.1. В действительности нормальная форма (2.3) имеет место, когда росток векторного поля при $\varepsilon = \varepsilon_*$ не имеет нетривиального формального первого интеграла (см. [3]). Это условие отсекает множество бесконечной коразмерности в пространстве гладких гиперболических резонансных ростков векторных полей.

Для особой точки типа седлоузел обозначим через $(\mu + 1)$ обычную кратность этой особой точки (т.е. максимальное число особых точек, на которые „рассыпается“ данная при малом возмущении).

В конечно-параметрическом семействе векторных полей нормальная форма седлоузла кратности $(\mu + 1)$ имеет вид (см. [4, табл. 1])

$$\begin{cases} \dot{x} = Q_\mu(x, \lambda), \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \tag{2.4}$$

Замечание 2.2. В действительности нормальная форма (2.4) имеет место, когда выполняется условие Лоясевича (модуль векторного поля убывает при подходе к особой точке не быстрее, чем некоторая степень расстояния до нее), см. [4]. Это условие отсекает множество бесконечной коразмерности в пространстве гладких седлоузловых ростков векторных полей.

Пользуясь указанными выше нормальными формами, мы можем считать, что базисная система (2.1) имеет нормализованный вид, т.е. каждая функция Δ_j отвечает особой точке, записанной в нормальной форме.

При помощи нормализованной базисной системы мы k-параметрическому семейству векторных полей сопоставляем k-параметрическое семейство наборов конечно-гладких функций f_j. В результате получаем следующее предложение.

Предложение 2.3. *Максимальная цикличность в теореме* 1.8 *не превосходит числа близких к нулю решений базисной системы* (2.1), *в которой функции f_j типичны.*

Замечание 2.4. Точное описание множества типичных наборов конечно-гладких функций f_j будет приведено ниже, см. определение 2.17.

2.4. Пфаффовы уравнения и функционально-пфаффова система. Нормальные формы (2.3) и (2.4) интегрируются в квадратурах, отображения соответствия для них вычисляются явно. Эти отображения задаются трансцедентными функциями и определены, вообще говоря, не всюду (см., например, [4, §1.1]). Однако они удовлетворяют *пфаффовым уравнениям*, т.е. дифференциальным уравнениям с *полиномиальными* коэффициентами (см. там же). Можно заменить сингулярные уравнения $y_j - \Delta_j(x_j, \varepsilon) = 0$ пфаффовыми уравнениями, которым удовлетворяет их левая часть. При этом число решений получившейся системы (она называется *функционально-пфаффовой*) будет не меньше числа решений соответствующей базисной системы (2.1).

Приведем необходимые формулировки.

Лемма 2.5 (Y. Ilyashenko, S. Yakovenko [4]). *Отображения соответствия для невырожденного седла удовлетворяют пфаффовым уравнениям, приведенным в табл.* 1; S_0 *обозначает нерезонансное седло,* S_μ — *седло с кратностью вырождения* μ; *определение* P_μ *см. в формуле* (2.2).

Таблица 1

Пфаффовы уравнения для седел

Тип	Пфаффовы уравнения
S_0	$xdy - \lambda ydx = 0$
S_μ	$P_\mu(x^{\mathsf{m}},\lambda)\,\left[yP_\mu(y^{\mathsf{n}},\lambda)dx - \left(\frac{\mathsf{n}}{\mathsf{m}} + P_\mu(y^{\mathsf{n}},\lambda)\right) xP_\mu(x^{\mathsf{m}},\lambda)dy\right] = 0$

Для седлоузлов возможны два типа отображений соответствия: вдоль центрального многообразия (см. рис. 4) и от гиперболического многообразия к центральному (или обратно). Обозначения для отображений, соответствующих седлоузлу кратности μ: D_μ^c и D_μ^h.

Лемма 2.6 (Y. Ilyashenko, S. Yakovenko [4]). *Отображения соответствия для седлоузла удовлетворяют уравнениям, приведенным в табл.* 2; *определение* Q_μ *см. в формуле* (2.2).

Таблица 2

Пфаффовы уравнения для седлоузлов

Тип	Пфаффовы уравнения
D_μ^c	$x(xdy - ydx) = 0$
D_μ^h	$Q_\mu(x,\lambda)dy - ydx = 0$

Замечание 2.7. В пфаффовых уравнениях для S_μ (см. табл. 1) и D_μ^c (см. табл. 2) множители $P_\mu(x^{\mathsf{m}},\lambda)$ и x соответственно добавлены для того, чтобы удовлетворить топологическим требованиям процедуры Хованского (подробнее см. [4, лемма 3.1]).

Замечание 2.8. Очевидно, что отображение соответствия для сёдел обоих типов и седлоузла типа D_μ^h определено как для невозмущенной системы, так и для любого достаточно малого ее возмущения. Для седлоузла типа D_μ^c это не так: отображение соответствия определено лишь для некоторых возмущений исходной системы (рис. 4; отображение соответствия определено лишь для картинки „c“).

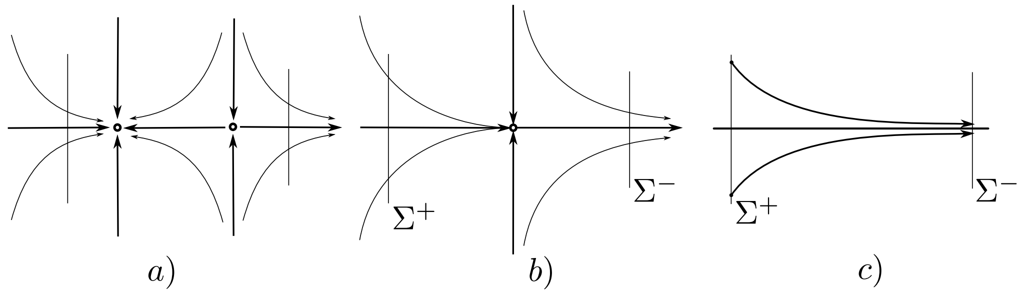


Рис. 4. Отображение соответствия седлоузла типа D_μ^c: a) при докритическом значении параметра; b) при критическом значении параметра; c) при закритическом значении параметра.

Замечание 2.9. Базисная система для немонодромного полицикла имеет смысл при тех значениях параметра, при которых определены все отображения соответствия, однако соответствующие пфаффовы уравнения сохраняют смысл для любых возмущений. Тем самым при переходе к пфаффовой системе мы можем получить „лишние" (не соответствующие предельным циклам) решения, но не теряем „нужных" (соответствующих предельным циклам) решений.

Как уже было отмечено, мы формально заменяем сингулярные уравнения базисной системы на соответствующие пфаффовы уравнения вида $A_j dx_j + B_j dy_j = 0$, взятые из табл. 1 и 2, и получаем *функционально-пфаффову систему*

$$\begin{cases} \omega_j = 0, \\ F_j(x, y, \varepsilon) = 0, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n, \tag{2.5}$$

$$\omega_j := A_j dx_j + B_j dy_j, \quad F_j(x, y, \varepsilon) := x_{j+1} - f_j(y_j, \varepsilon),$$
$$(x, y) := (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in (\mathbb{R}^{2n}, 0), \quad \varepsilon \in (\mathbb{R}^k, 0).$$

Эту систему следует интерпретировать так: нужно взять произвольное интегральное многообразие Γ системы, состоящей из пфаффовых уравнений системы (2.5), и найти его пересечение с множеством уровня $F^{-1}(0)$, где $F : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to \mathbb{R}^n$ — отображение с координатными функциями F_j. Решения базисной системы (2.1) являются решением функционально-пфаффовой для какого-то конкретного интегрального многообразия Γ. Оценивая число изолированных пересечений для *произвольного* многообразия Γ, мы получаем оценку сверху на число решений базисной системы.

Предельные циклы соответствуют изолированным неподвижным точкам отображения Пуанкаре, поэтому нам требуется оценить число только изолированных решений системы (2.1). В свою очередь, число изолированных решений системы (2.1) оценивается сверху числом *невырожденных* решений аналогичной системы с малой правой частью (см. [4, лемма 3.2]), которые, в свою очередь, соответствуют *трансверсальным* пересечениям Γ с типичным слоем $F^{-1}(a)$ для малого $a \in (\mathbb{R}^n, 0)$ (см. [4, лемма 3.3]). Поскольку интегральное многообразие и множество уровня имеют дополнительные размерности, трансверсальное пересечение всегда состоит из изолированных точек, которые мы будем называть *регулярными решениями* системы (2.5). Нам требуется оценить сверху их число, причем эта оценка должна быть равномерной по всем интегральным многообразиям Γ и достаточно малым значениям параметров.

Для дальнейших рассуждений будет удобно рассматривать параметры ε и $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, $\lambda^j \in \mathbb{R}^{\mu_j+1}$ как дополнительные независимые переменные, добавив в систему новые уравнения вида

$$\varepsilon = \varepsilon^* \in \mathbb{R}^k, \quad \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}^m,$$

где $m := n + \sum \mu_j$.

Кроме того, в пфаффовом уравнении для резонансного седла S_μ (см. табл. 1) степени переменных x и y ничем не ограничены из-за наличия резонанса $\mathsf{m} : \mathsf{n}$. Неограниченные степени служат препятствием нашему исследованию, так как степени пфаффовых уравнений войдут в итоговую оценку. Однако это легко исправить, добавив новые переменные $z = x^{\mathsf{m}}$ и $w = y^{\mathsf{n}}$ и пфаффовы уравнения на них. В результате для каждого резонансного седла мы получаем три пфаффовых уравнения:

$$\begin{cases} P_\mu(z,\lambda)\left[yP_\mu(w,\lambda)dx - \left(\frac{\mathsf{n}}{\mathsf{m}} + P_\mu(w,\lambda)\right) xP_\mu(z,\lambda)dy\right] = 0, \\ xdz - \mathsf{m}zdx = 0, \\ ydw - \mathsf{n}wdy = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Первое из этих уравнений называется *основным*, а остальные два — *дополнительными*. Также *основными* называются уравнения из табл. 2.

Итак, заменим теперь функционально-пфаффову систему (2.5) на новую систему такого же типа со следующими отличиями:

(1) каждое пфаффаво уравнение для S_μ из табл. 1 заменено тремя уравнениями (2.6);
(2) параметры ε и λ в выражении (2.2) для Q_μ включены в число переменных; в систему включены уравнения на параметры: $\varepsilon - \varepsilon^* = b_\varepsilon$ и $\lambda - \lambda^* = b_\lambda$, где правые части малы.

Мы будем искать оценку не только для систем с нулевой правой частью, но и для систем с малой правой частью; эта оценка должна быть равномерна относительно правой части.

Модифицированная функционально-пфаффова система может быть записана так:

$$\begin{cases} \Omega = 0 \backsim n + 2s, \\ F_f = a \backsim n, \\ F = b \backsim k + m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Здесь строка $\Omega = 0$ обозначает пфаффовы уравнения, которые берутся из табл. 1 и 2, а для резонансного седла — из системы (2.6); строка $F_f = a$ обозначает функциональные уравнения вида $x_{j+1} - f_j(y_j, \varepsilon) = a_j$, а строка $F = b$ — уравнения на параметры ε и дополнительные параметры λ. Числа правее знака „$\backsim$“ означают оценку на количество уравнений такого типа. Размерность фазового пространства этой системы равна $\mathbf{m} := 2n + 2s + k + m$.

2.5. Процедура Хованского. Подробное описание процедуры Хованского [6] выходит за рамки этой статьи. В этом параграфе мы укажем лишь самые необходимые факты (см. [5, §3.3]).

Процедура Хованского состоит в последовательной замене пфаффовых уравнений (по одному на каждом шаге) на функциональные по определенному алгоритму. Каждый шаг процедуры состоит в переходе от одной системы вида (2.7) к двум (или одной) похожим системам, в которых меньше число пфаффовых уравнений; при этом число решений исходной системы не превышает суммы чисел решений новых систем. В результате применения процедуры мы переходим от одной функционально-пфаффовой системы к набору чисто функциональных систем специального вида, допускающих оценку числа решений с помощью аналога теоремы Безу, причем сумма оценок числа решений этих систем оценивает число решений исходной функционально-пфаффовой системы.

Более подробно алгоритм состоит в следующем. На каждом шаге процедуры одно из пфаффовых уравнений исходной системы заменяется либо на функциональное *уравнение контакта*, либо на уравнение с *накрывающей функцией*.

Уравнение контакта имеет вид (см. [5, §3.3 и формула (47)])

$$\mathcal{F} := *\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n+2s} \wedge dF_{f_1} \wedge \cdots \wedge dF_{f_l} \wedge dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_k = \epsilon, \tag{2.8}$$

где ω_j — левые части пфаффовых уравнений; $F_{f_j} := y_j - f_j(x_j, \varepsilon)$; $F_j := \varepsilon_j - b_j$; число ϵ мало.

Уравнение с накрывающей функцией имеет вид (см. [5, уравнение (64)])

$$\rho := \rho_1 \dots \rho_n \rho_\varepsilon = \epsilon, \tag{2.9}$$

где $\rho_\varepsilon = \sum (r^2 - \varepsilon_i^2)$ для некоторого малого r; функции ρ_j берутся из табл. 3 в соответствии с типом j-й особой точки; число ϵ мало.

Таблица 3

Накрывающие функции

Тип особой точки	Накрывающая функция
S_0	$xy(r-x)(r-y)\widetilde{\rho}$
S_μ	$xyzw(r-x)(r-y)(r-z)(r-w)P_\mu^2(z,\lambda)\widetilde{\rho}$
D_μ^c	$x^2(r^2-x^2)(r^2-y^2)\widetilde{\rho}$
D_μ^h	$y(r-y)(r^2-x^2)Q_\mu(x,\lambda)\widetilde{\rho}$

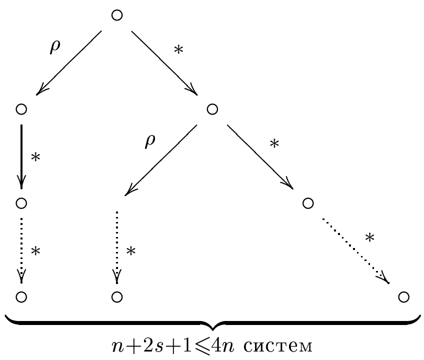
Пояснения к табл. 3. В таблице представлены накрывающие функции для различных типов особых точек. Здесь r — малый параметр, $z := x^{\mathsf{m}}$, $w := y^{\mathsf{n}}$, а $\widetilde{\rho}$ — полином вида

$$\widetilde{\rho}(\lambda) := (r^2 - \lambda_1^2) \dots (r^2 - \lambda_{\mu-1}^2)(r^2 - (c - \lambda_\mu)^2), \tag{2.10}$$

где c — вещественное число, которое называется *параметром локализации* семейства (подробнее см. [3]). Остальные обозначения были введены ранее (см. п. 2.3).

Таким образом, возникают две новые системы, в каждой из которых дифференциальных уравнений на одно меньше, чем в исходной системе. После замены одного уравнения аналогичным образом заменяется следующее. Однако если в системе на некотором шаге уже участвует уравнение с накрывающей функцией, то далее пфаффовы уравнения заменяются только на уравнения контакта (см. схему).

Схема процедуры Хованского: кружки обозначают системы, которые мы рассматриваем на каждом шаге, стрелка со знаком „$*$“ — замена одного из пфаффовых уравнений на уравнение контакта, „ρ“ — замена одного из пфаффовых уравнений на уравнение с накрывающей функцией.



Процедура Хованского останавливается, когда в системе будут заменены все пфаффовы уравнения. Число пфаффовых уравнений равно $n + 2s$, поэтому в итоге мы получаем $n + 2s + 1 \leqslant 4n$ систем.

Утверждение 2.10 (см. теорему 7 и следствие 4 из [5]). *При описанном выше переходе от одной системы к двум (или одной) новым сумма числа решений полученных систем (просто число решений, если система одна) не меньше числа решений исходной системы.*

Замечание 2.11. Пусть $\mathcal{G}_{\mathbf{f}} = a$ есть некоторая система, полученная на каком-то шаге процедуры Хованского. Учитывая соотношения (2.8) и (2.9), по индукции нетрудно показать, что каждая компонента $\mathcal{G}_i$ является полиномом от переменных, параметров, функций f_j и их производных различных порядков или дифференциальной формой с полиномиальными коэффициентами.

Замечание 2.11 мотивирует следующее определение.

Определение 2.12. Рассмотрим некоторое уравнение системы, участвующей в процедуре Хованского. Если это уравнение пфаффово, оно имеет вид $\omega = 0$. Назовем его *K-степенью* максимальную степень коэффициентов формы ω. Если это уравнение функциональное, назовем его *K-степенью* степень этого уравнения как полинома от переменных, функций f_j и их производных.

Замечание 2.13. Для всех пфаффовых уравнений K-степень равна их обычной степени; то же относится и к любой накрывающей функции. Для каждой компоненты функционального уравнения $F_f = a$ ее K-степень, как и степень ее дифференциала, равна единице. Для каждой компоненты уравнения на параметры ее K-степень тоже равна единице, а K-степень ее дифференциала — нулю.

В результате применения процедуры Хованского к системе (2.7) мы получаем не более $4n$ функциональных систем, причем для каждой системы можно оценить ее K-степень (см. §3). Число решений исходной системы не превосходит суммы числа решений итоговых систем. Если эти системы были бы просто полиномиальными (относительно переменных), то для оценки числа решений достаточно было бы применить классическую теорему Безу.

Оказывается, при некоторых условиях на правую часть функциональной системы выполняется аналог теоремы Безу. Этот аналог дает оценку числа решений для *типичных декартовых* отображений через произведение K-степеней всех уравнений системы (теорема 2.15). При помощи этой теоремы мы оцениваем количество решений систем, получившихся в результате процедуры Хованского. Далее остается умножить это число на количество систем и тем самым получить оценку на число решений исходной системы.

2.6. Теорема Безу–Калошина об оценке числа решений и ее применение. Мы сформулируем теорему Безу–Калошина не в полной общности, а в том виде, в котором нам потребуется ее использовать. Полную формулировку можно найти в [5, теорема 12].

Пусть некоторая система

$$\mathcal{G}_{\mathbf{f}} = a$$

получена в результате процедуры Хованского. Здесь

$$\mathcal{G}_{\mathbf{f}} := (P^1, \dots, P^{\mathbf{m}}),$$

где P^i суть полиномы от переменных, функций f_j и их производных. Заметим, что при $i \neq j$ функции f_i и f_j зависят от различных наборов переменных.

Пусть $f_i \in C^p_{\mathcal{I}_i}$, где $p > \mathbf{m}+1$, а символ $\mathcal{I}_i$ обозначает набор переменных, соответствующих функции f_i.

Определение 2.14. Для любого натурального d и малого положительного δ множество

$$K^{d,\delta} := \{(a_1, \dots, a_{\mathbf{m}}) \mid 0 < |a_1| < \delta,\ 0 < |a_{j+1}| < |a_1 \dots a_j|^d,\ j = 1, \dots, \mathbf{m}-1\}$$

назовем *конусом Калошина.*

Теорема 2.15 (Безу–Калошина, [5]). *Существуют открытое всюду плотное множество F_P в функциональном пространстве $C^p_{\mathcal{I}_1} \times \dots \times C^p_{\mathcal{I}_n}$ и целое число d, такие что для каждого $\mathbf{f} \in F_P$ существует характеристический размер $r_0 > 0$ и число $\delta > 0$, при которых число регулярных прообразов произвольной точки $a = (a_1, \dots, a_{\mathbf{m}})$ из конуса Калошина $K^{d,\delta}$ допускает оценку*

$$\#\{x \in U_r :\ \mathcal{G}_{\mathrm{f}} = a\} \leqslant \prod_1^{\mathbf{m}} \deg P^i,$$

где $0 < r \leqslant r_0$, а $U_r \subset \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$ — r-куб с центром в нуле.

Следующая лемма, доказательство которой содержится в §4 статьи [5], дает нам право применять теорему Безу–Калошина.

Лемма 2.16. *Можно считать, что правые части $a := (a_1, \dots, a_{\mathbf{m}})$ функциональных систем, полученных в итоге процедуры Хованского, принадлежат конусу Калошина из формулировки теоремы* 2.15.

Как уже было отмечено в конце п. 2.5, после применения теоремы Безу–Калошина остается лишь подсчитать оценки на степени систем, полученных после применения процедуры Хованского.

Теперь можно точно сформулировать, что подразумевается под термином *типичность*.

Занумеруем каким-либо способом системы, полученные в результате процедуры Хованского, и пусть множество F_{P_j} есть открытое всюду плотное множество из теоремы 2.15 для j-й системы.

Определение 2.17. Набор $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, состоящий из C^p-гладких функций, $p > \mathbf{m} + 1$, называется *типичным*, если $\mathbf{f} \in F_{P_j}$ для всех $j = 1, \ldots, \mathbf{m}$.

2.7. Различия в подходах. Ю. Ильяшенко и С. Яковенко [4] исследовали число регулярных прообразов точек образа (см. систему (2.5) и ее описание на с. 66) без каких-либо ограничений на эти точки. С использованием метода Хованского и теоремы Габриэлова они доказали конечность $E(k)$ для любого натурального k.

В работе В. Калошина [5] рассматриваются прообразы только специальных точек образа (см. условие на a_i в формулировке теоремы 2.15). Это позволило доказать аналог теоремы Безу (см. теорему 2.15), что упростило исследование, в результате чего была найдена явная оценка на число $E(k)$.

В данной работе тем же методом, но с помощью более точного комбинаторного анализа дается явная оценка на $E(n, k)$. Главная идея подсчета состоит в том, чтобы проследить за ростом степеней на каждом шаге процедуры Хованского и дать общую оценку на степень уравнений для систем на каждом шаге.

Различие данной работы и работы В. Калошина [5] состоит в способе подсчета степеней на предпоследнем шаге в схеме доказательства (пунктирная стрелка на рис. 2).

§3. Оценка сверху числа $E(n, k)$

В этом параграфе проведены вычисления, необходимые для доказательства теоремы 1.8.

Напомним используемые обозначения:

k — количество параметров семейства (коразмерность);

n — количество (с повторениями) вершин в полицикле;

s — количество резонансных седел;

μ_j — кратность j-й особой точки;

$m := n + \sum \mu_j$ — размерность пространства параметров λ.

Рассмотрим функционально-пфаффову систему

$$\begin{cases} \Omega = 0 \backsim n + 2s \leqslant 3n, \\ F_f = a \backsim n, \\ F = b \backsim k + m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Применим к ней процедуру Хованского и получим в итоге $4n$ функциональных систем. По теореме Безу–Калошина, чтобы оценить число решений таких систем, достаточно оценить произведение K-степеней входящих в них уравнений. Для этого нужно сначала оценить K-степени системы (3.1), а также функции контактов для нее и накрывающей функции. Затем, пользуясь полученными результатами, можно оценить рост K-степеней в процедуре Хованского (см. лемму 3.4). Наконец, с помощью этой оценки мы получим необходимый результат.

Замечание 3.1. Степень полиномиальных коэффициентов в уравнениях группы $\Omega = 0$ системы (2.7) (см. также (3.1)) не превосходит $6\mu + 4$.

Доказательство. Рассмотрим, например, пфаффово уравнение для резонансного седла S_μ (см. табл. 1). Поскольку $\deg P_\mu = 2\mu + 1$ (см. (2.2)), степень пфаффова уравнения от переменных x, y, $z = x^{\mathsf{m}}$, $w = y^{\mathsf{n}}$ и λ равна $6\mu + 4$. Остальные уравнения рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 3.2. *Для функционально-пфаффовой системы* (3.1) *выполняются утверждения*:

- *K-степень функции контактов $\mathcal{F}$ не превосходит $6k + 7n$*;
- *K-степень дифференциала $d\mathcal{F}$ не превышает K-степени функции контактов $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Напомним выражение для функции контактов (см. п. 2.5):

$$\mathcal{F} = *\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n+2s} \wedge dF_{f_1} \wedge \cdots \wedge dF_{f_l} \wedge dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_k.$$

Здесь ω_j — левые части пфаффовых уравнений, $F_{f_j} \equiv y_j - f_j(x_j, \varepsilon)$, $F_j = \varepsilon_j - b_j$. Формы ω_j, соответствующие дополнительным уравнениям резонансных седел, имеют единичную K-степень, и их $2s \leqslant 2n$ штук. K-степень остальных форм ω_j оценивается через $6\mu_j + 4$, согласно замечанию 3.1, и их n штук. При этом $\sum \mu_j \leqslant k$. Формы dF_{f_j} имеют K-степень 1, формы dF_j — K-степень 0. Собрав все оценки вместе, получим первое утверждение леммы.

Утверждение относительно K-степени дифференциала справедливо не только для функции контактов, но и для любого многочлена от переменных, функций f_j и их производных. Действительно, при дифференцировании многочлена по любой из его переменных степень падает на единицу;

при дифференцировании по переменным x_j, ε и λ может еще возникнуть множитель типа $\partial f_j/\partial x_j$, например:

$$F = f_1(x_1, y_1, \varepsilon), \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1(x_1, y_1, \varepsilon)}{\partial x_1},$$

в результате чего К-степень многочлена сохранится. Это завершает доказательство леммы. □

Замечание 3.3. Легко убедиться, что

(1) степень любой накрывающей функции из табл. 3 оценивается выражением
$$\deg \rho_j \leqslant 6\mu + 10; \tag{3.2}$$

(2) степень накрывающей функции из процедуры Хованского (см. уравнение (2.9)) оценивается выражением
$$\deg \rho \leqslant 8k + 10n. \tag{3.3}$$

Доказательство. Неравенство (3.2) следует из $\deg P_\mu = 2\mu+1$, $\deg Q_\mu = 2\mu + 2$ (см. (2.2)), $\deg \widetilde{\rho}_\mu = 2\mu$ (см. (2.10)). Неравенство (3.3) следует из неравенства (3.2), уравнения (2.9) и неравенства $\sum \mu_j \leqslant k$. □

Лемма 3.4 (об экспоненциальном росте степеней). *К-степень уравнения контактов и накрывающей функции (если она участвует) на j-м шаге процедуры Хованского не превышает $2^j D$, где $D := 18k$.*

Доказательство. Заметим, что в силу неравенства[3] $n \leqslant k$ для любых натуральных k выполняется неравенство
$$D \geqslant \max(6k + 7n, 8k + 10n). \tag{3.4}$$

Для $j = 1$ утверждение леммы следует из неравенства (3.4), леммы 3.2 и замечания 3.1.

Пусть теперь утверждение леммы выполняется для всех $j < j_0$, докажем для j_0. Заметим, что сумма К-степеней уравнений исходной системы не более D. На шаге j_0 имеется два варианта: либо очередная форма заменяется на накрывающую функцию, либо — на уравнение контакта. В первом случае утверждение леммы снова следует из замечания 3.1. Рассмотрим уравнение контакта на j_0-м шаге процедуры Хованского. По построению его К-степень не превосходит суммы К-степеней уравнений системы предыдущего шага, для которой верно предположение индукции. Эта сумма имеет вид $\sum\limits_{1}^{j_0-1} 2^j D + D = 2^{j_0} D$. □

---

[3] Действительно, седлоузел является вырождением коразмерности один; совпадение сепаратрис двух седел является вырождением той же коразмерности. Поэтому полицикл с n вершинами является вырождением коразмерности не ниже n.

Доказательство теоремы 1.8. Пусть Π — произведение K-степеней уравнений каждой системы, полученной в результате процедуры Хованского. Воспользуемся леммой об экспоненциальном росте степеней и выпишем цепочку неравенств:

$$\Pi \leqslant \prod_{j=1}^{n+2s} 2^j D \leqslant \prod_{j=1}^{3n} 2^j D \leqslant 2^{5n^2+2n} D^{3n} \leqslant 2^{5n^2+17n} \cdot k^{3n}.$$

Всего в результате процедуры Хованского возникает не более $4n$ систем, поэтому после применения к ним теоремы Безу–Калошина получаем заявленный результат: $E(n,k) \leqslant 2^{5n^2+20n} k^{3n}$. Теорема 1.8 доказана. □

Список литературы

[1] Арнольд В., Афраймович В., Ильяшенко Ю., Шильников Л., *Теория бифуркаций*, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Фундам. направл., т. 5, Динамические системы–V, ВИНИТИ, М., 1986, с. 5–218.

[2] Ilyashenko Yu., *Normal forms for local families and nonlocal bifurcations*, Astérisque No. 222 (1994), 233–258.

[3] Ильяшенко Ю., Яковенко С., *Конечно-гладкие нормальные формы локальных семейств диффеоморфизмов и векторных полей*, Успехи мат. наук **46** (1991), №1, 3–39.

[4] Ilyashenko Y., Yakovenko S., *Finite cyclicity of elementary polycycles in generic families*, Concerning the Hilbert 16th Problem, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 21–95.

[5] Kaloshin V., *The existential Hilbert 16th problem and an estimate for cyclicity of elementary polycycles*, Invent. Math. **151** (2003), no. 3, 451–512.

[6] Хованский А. Г., *Малочлены*, ФАЗИС, М., 1997.

[7] Roussarie R., *A note on finite cyclicity property and Hilbert's 16th problem*, Dynamical Systems (Valparaiso, 1986) (R. Bamon, R. Lavarca, J. Palis, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1331, Springer-Verlag, Berlin, 1988, pp. 161–168.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1
Россия
E-mail: pkaleda@yandex.ru

Поступило 5 июля 2009 г.