Введение в теорию Штурма–Лиувилля

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко

10 февраля 2015 г.

Один из примеров линейных неавтономных уравнений второго порядка — это уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

для некоторых непрерывных функций p, q. Вообще говоря, такие уравнения не решаются в квадратурах: решение нельзя представить в виде композиции интегрирований, арифметических действий и элементарных функций (экспонент, логарифмов, синусов и косинусов). Исследование решений этих уравнений имеет многочисленные приложения в физике (см., например, раздел 2 «Колебания мембраны»).

1 Приведенные уравнения. Теорема Штурма о сравнении.

Оказывается, уравнение (1) всегда можно упростить, избавившись от члена $p(t)\dot{x}$.

Предложение 1. *Уравнение* (1) *можно привести к виду* $\ddot{z} + Q(t)z = 0$, *где* $Q(t) = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}\dot{p} + q$.

Доказательство. Для этого достаточно сделать замену $x = ze^{-\frac{1}{2}P}$, где $\dot{P}(t) = p(t)$. Действительно, $\dot{z} = e^{\frac{1}{2}P}\left(\dot{x} + \frac{1}{2}p(t)x\right)$, и

$$\ddot{z} = e^{\frac{1}{2}P}\left(\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + \frac{1}{2}p(t)\dot{x} + \frac{1}{2}p(t)\left(\dot{x} + \frac{1}{2}p(t)x\right)\right) =$$
$$= e^{\frac{1}{2}P}\left(-p(t)\dot{x} - q(t)x + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + p(t)\dot{x} + \frac{1}{4}p^2(t)x\right) =$$
$$= e^{\frac{1}{2}P}\left(-q(t)x + \frac{1}{2}\dot{p}(t)x + \frac{1}{4}p^2(t)x\right) = \left(-q(t) + \frac{1}{2}\dot{p}(t) + \frac{1}{4}p^2(t)\right)z.$$

□

Для приведенных уравнений верна следующая важная

Теорема 2 (Теорема Штурма о сравнении)**.** *Рассмотрим два приведенных уравнения:*

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

и

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0.$$

где функции q и Q непрерывны. Пусть (ненулевое) решение первого уравнения $x(t)$ обращается в нуль в точках a, b: $x(a) = x(b) = 0$.

- *Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено $Q(t) > q(t)$. Тогда любое решение второго уравнения $X(t)$ обращается в нуль на* ***интервале*** *(a, b).*
- *Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнено $Q(t) \geqslant q(t)$. Тогда любое решение второго уравнения $X(t)$ обращается в нуль на* ***отрезке*** *$[a, b]$. При этом или оно обращается в нуль и на* ***интервале*** *(a, b), или $q \equiv Q$, $X(a) = X(b) = 0$.*

Геометрическое доказательство[1]. Мы дадим геометрическое доказательство только первого утверждения теоремы.

Так как функции q и Q непрерывны, к нашим уравнениям применима теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Из неё следует, что множество нулей функции $x(t)$ дискретно и в этих нулях $\dot{x}(t)$ не обращается в нуль. Поэтому в качестве a, b можно взять соседние нули функции $x(t)$. Без ограничения общности можно считать, что $x(t)$ положительна на отрезке $[a, b]$, а тогда $\dot{x}(a) > 0$, $\dot{x}(b) < 0$.

Пусть решение второго уравнения $X(t)$ не имеет нулей. Будем считать, что $X(t) > 0$ на отрезке $[a, b]$ (если это не так, перейдем к функции $-X$).

Сведем оба наших дифференциальных уравнения второго порядка к системам двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -q(t)x \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -Q(t)X \end{cases}$$

Заметим, что точка $(x(t), \dot{x}(t))$ сделала полоборота вокруг нуля на плоскости $0xy$, пройдя от точки $(0, \dot{x}(a))$ до точки $(0, \dot{x}(b))$. А точка $(X(t), \dot{X}(t))$ все время находится в правой полуплоскости. Поэтому в какой-то момент времени t луч, выходящий из нуля и содержащий точку $(x(t), \dot{x}(t))$, обогнал луч, на котором лежит точка $(X(t), \dot{X}(t))$. Умножая функцию $X(t)$ на подходящую константу, добьемся того, чтобы в этот момент точки $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$ совпадали. Идея состоит в том, что решение второго уравнения вращается вокруг нуля быстрее, чем решение первого, и поэтому такого не может быть.

Действительно, рассмотрим функции $\phi(t)$ и $\Phi(t)$, равные угловым координатам точек $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$. Тогда их производные равны

$$\dot{\phi} = \frac{-\dot{x}y + x\dot{y}}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2 - q(t)x^2}{x^2 + y^2}$$

и, аналогично, $\dot{\Phi} = \frac{-y^2 - Q(t)x^2}{x^2+y^2}$. Поэтому в точке t, для которой $(x(t), \dot{x}(t))$ и $(X(t), \dot{X}(t))$ совпадают, $|\dot{\Phi}| > |\dot{\phi}|$, и решение первого уравнения не может обогнать решение второго уравнения.

□

Аналитическое доказательство[2]. Сначала докажем первое утверждение теоремы. Как и раньше (см. геометрическое доказательство), можно считать, что $x(t)$ и $X(t)$ положительны на отрезке $[a, b]$, $\dot{x}(a) > 0$ и $\dot{x}(b) < 0$.

Умножим первое уравнение на X, а второе на x, и запишем их разность:

$$X\ddot{x} - x\ddot{X} = (Q(t) - q(t))Xx.$$

Интегрируя по отрезку $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b X\ddot{x} - x\ddot{X}dt = \int_a^b (Q(t) - q(t))Xxdt. \tag{2}$$

Правая часть строго больше нуля. Но интеграл в левой части можно взять по частям, получится $-X(a)\dot{x}(a) + X(b)\dot{x}(b)$. Так как $\dot{x}(a) > 0, \dot{x}(b) < 0$, $X(a) > 0$, $X(b) > 0$, то левая часть отрицательна. Противоречие.

С помощью равенства (2) можно доказать и второе утверждение теоремы. Действительно, пусть $q \leqslant Q$ и $X(t) > 0$ на интервале (a, b). Тогда правая часть равенства (2) неотрицательна и равна нулю только при $Q \equiv q$, а левая часть неположительна и равна нулю только при $X(a) = X(b) = 0$.

□

Следствие 3. *Пусть $q(t) < 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда любое ненулевое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ имеет не более одного нуля на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ таково, что на нашем отрезке $q(t) < -\delta < 0$. Заметим, что решение уравнения $\ddot{x} - \delta x = 0$ — функция $e^{\sqrt{\delta}t}$, и она нигде не обращается в нуль. Но по теореме Штурма она должна обращаться в нуль между любыми двумя нулями решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$.

Поэтому у решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ не более одного нуля. □

Следствие 4. *Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $q(t)$ удовлетворяет неравенствам $m^2 < q(t) < M^2$, δ — расстояние между какими-то соседними нулями решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$. Тогда*

$$\frac{\pi}{M} < \delta < \frac{\pi}{m}.$$

В частности, если неравенство $m^2 < q(t) < M^2$ выполняется на всей числовой оси, любое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ имеет бесконечно много нулей.

Доказательство. Достаточно сравнить наше уравнение с уравнениями $\ddot{x} + m^2x = 0$ и $\ddot{x} + M^2x = 0$, решения которых — $\sin(mt + \phi)$ и $\sin(Mt + \psi)$ соответственно. Мы получим, что между двумя соседними нулями функции $\sin(mt + \phi)$ для любого ϕ есть нуль нашей функции, поэтому $\delta < \frac{\pi}{m}$. С другой стороны, между двумя соседними нулями нашей функции есть нуль функции $\sin(Mt + \psi)$ для любого ψ, откуда $\frac{\pi}{M} < \delta$. □

2 Колебания мембраны.

Сейчас мы получим важный пример уравнения вида (1) — уравнение Бесселя, решениями которого являются известные функции Бесселя.

Возьмем круглую упругую мембрану радиуса r_0, край которой закреплен. Пусть точка мембраны (x, y) в момент времени t сместилась в вертикальном направлении на величину $u(x, y, t)$. Тогда функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \tag{3}$$

где Δu— *оператор Лапласа* от функции u:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Вывод этого уравнения можно найти, например, в книге С.Л.Соболева "Уравнения математической физики", стр. 14-15.

Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями в частных производных* (обратите внимание на то, что в уравнении присутствуют частные производные неизвестной функции u по разным переменным, поэтому оно не является обыкновенным дифференциальным уравнением).

Уравнение (3) удобно переписать в полярных координатах. По теореме о производной сложной функции,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Продифференцируем это равенство еще раз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Теперь сложим это выражение с аналогичным выражением для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Имеем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \overbrace{\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)}^{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \overbrace{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right)}^{\frac{1}{r^2}} +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}_{0} + \frac{\partial u}{\partial r} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)}_{\frac{1}{r}} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)}_{0}.$$

Чтобы посчитать выражения в скобках, нужно подставить $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Стоит отметить, что в первых двух скобках написаны квадраты длин градиентов функций r и ϕ, в третьей — скалярное произведение этих градиентов (ср. с выкладкой из леммы 15.7 главы "Законы Кеплера"), а выражения в последних двух скобках — это $\Delta r = \frac{1}{r}$ и $\Delta\phi = 0$.

Итак,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2},$$

поэтому уравнение (3) в координатах (r, ϕ) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \tag{5}$$

$$u(r_0, \phi, t) = 0. \tag{6}$$

Второе уравнение называется *граничным условием*; оно следует из того, что край мембраны закреплен.

Эту систему уравнений можно решать методом Фурье.

3 Метод Фурье и его применение к уравнению колебания мембраны.

Метод Фурье для решения уравнений в частных производных состоит в том, чтобы сперва найти все решения вида $u(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)$ (которые могут и не удовлетворять граничному условию), а потом попытаться составить из них (возможно, бесконечную) линейную комбинацию, чтобы она удовлетворяла граничному условию.

Мы не будем доказывать, что таким образом можно получить все решения уравнения (3) (то есть обосновывать применимость метода Фурье): это будет сделано в более общем случае в курсе уравнений в частных производных. Рассмотрим только один важный пример.

3.1 Уравнение колебаний струны

Рассмотрим колебания струны длины 1 с закрепленными концами. Пусть точка струны с координатой x в момент времени t сдвинулась в вертикальном направлении на величину $u(x,t)$. Оказывается, что уравнение колебаний струны (после некоторой замены времени) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

которые означают, что у струны закреплены концы. Заметим, что это одномерный аналог уравнения колебаний мембраны (3).

Найдем решения вида $u_{\text{част}}(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Из уравнения следует, что

$$X''(x)T(t) = T''(t)X(x)$$

или $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$. Левая часть не зависит от t, а правая — от x. Поэтому на самом деле обе части не зависят ни от x, ни от t, то есть равны константе: $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \kappa$. Возникают три случая:

Случай 1: $\kappa > 0$. Тогда решения уравнения $T'' = \kappa T$ — это линейные комбинации экспонент $e^{\pm\sqrt{\kappa}t}$, поэтому они не могут быть ограничены; а нас интересуют именно колебания струны, то есть ограниченные решения уравнения (7). Строго говоря, надо проверить, что из таких решений нельзя составить ограниченную линейную комбинацию; это мы оставляем читателю.

Случай 2: $\kappa = 0$. Тогда решения уравнения $T'' = \kappa T$ — это линейные функции $T(t) = at + b$. Если $a \neq 0$, такое решение неограничено. Если $a = 0$, то $T(t)$ постоянно, то есть струна неподвижна; ясно, что это возможно только при $u(x,t) = 0$.

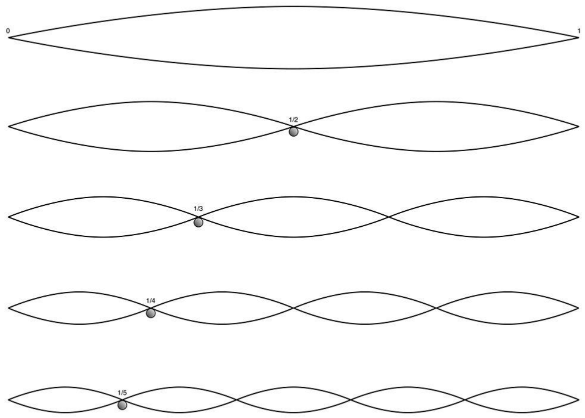


Рис. 1: Стоячая волна, n от одного до пяти.

Случай 3: $\kappa < 0$; обозначим $\kappa = -\lambda^2$. Мы получаем, что $X(x)$ — линейная комбинация $\cos \lambda x$ и $\sin \lambda x$, аналогичным образом решается уравнение на $T(t)$. Итак,

$$u_{\text{част}}(x,t) = (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)(C \sin \lambda t + D \cos \lambda t).$$

Из граничного условия, $B = 0$ и $\lambda = \pi n$. Поэтому колебание имеет вид

$$u_{\text{част}}(x,t) = \sin \pi n x (C \sin \pi n t + D \cos \pi n t). \tag{8}$$

Для струны это означает движение, которое называется «стоячая волна» (см.рис. 1): в точках $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ струна не двигается, а между ними колеблется вверх–вниз с частотой $n/2$. В жизни мы никогда не встречаем чистую стоячую волну, а всегда некоторую сумму таких колебаний.

Применимость метода Фурье означает, что любое колебание струны с закрепленными концами является суммой «стоячих волн» (8) для разных значений n:

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin \pi n x (C_n \sin \pi n t + D_n \cos \pi n t).$$

Зная начальное положение и скорость всех точек струны, можно вычислить и коэффициенты C_n, D_n.

Если, например, струна в начальный момент времени имеет положение $u(x,0) = \phi(x)$, а скорость всех её точек нулевая: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, то $C_n = 0$; поэтому

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} D_n \sin \pi n x \cos \pi n t.$$

В начальный момент времени имеем

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} D_n \sin \pi n x.$$

Итак, чтобы найти коэффициенты D_n — то есть разложить произвольное решение по стоячим волнам — достаточно разложить начальное положение струны $\phi(x)$ в ряд Фурье по функциям $\sin \pi n x$. Так как коэффициенты Фурье обычно быстро убывают, наибольший вклад дадут маленькие значения n.

Колебание при $n = 1$ соответствует основному тону струны. Его частота обратно пропорциональна длине струны (проверьте это, решив уравнение (7) на отрезке $[0, l]$). Это наблюдение объясняет факт, открытие которого приписывают Пифагору: если зажать струну на расстоянии p/q от конца при небольших значениях q — например, посередине, на расстоянии трети или на расстоянии четверти от конца — то она будет звучать «созвучно» первоначальному звуку. Соответстующие интервалы получили название октавы, кварты и квинты[3].

Остальные значения n дают звуки большей частоты — обертоны. За окраску звука (глубина, насыщенность, яркость, мягкость и т.д.) отвечают именно коэффициенты $D_2, D_3 \ldots$ при обертонах.

3.2 Применение метода Фурье к уравнению колебаний мембраны

Подставим в уравнение колебаний мембраны (5) функцию $u_{\text{част}}(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$. Получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} R(r)\Phi(\phi) = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\Phi(\phi)T(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\Phi(\phi)T(t) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}R(r)T(t).$$

При фиксированных r, t уравнение на функцию Φ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = C\Phi(\phi),$$

поэтому $\Phi(\phi)$ — линейная комбинация или экспонент $e^{\pm\sqrt{C}\phi}$, или синуса и косинуса $\sin\sqrt{-C}\phi, \cos\sqrt{-C}\phi$, в зависимости от знака C. Но чтобы функция $u = R(r)T(t)\Phi(\phi)$ была корректно определена в диске, нужно, чтобы Φ была 2π-периодична: $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Поэтому $\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{-C}\phi + B\cos\sqrt{-C}\phi$, причем $\sqrt{-C}$ целое. Поворотом в плоскости (r, ϕ) можно привести Φ к виду $\Phi(\phi) = \cos n\phi$, $n \in \mathbb{Z}$.

При фиксированных ϕ, r уравнение на функцию $T(t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = KT(t),$$

поэтому функция $T(t)$ тоже является линейной комбинацией или экспонент, или синуса и косинуса. Если нас интересуют колебания мембраны, то достаточно рассмотреть функции $A\sin lt + B\cos lt$. Сделаем замену времени $t \mapsto lt + c$ и приведем эту функцию к виду $T(t) = \sin t$.

Итак, $u = R(r)\cos n\phi \sin t$. Уравнение на функцию R получается более сложным:

$$r^2\frac{d^2 R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (r^2 - n^2)R = 0 \tag{9}$$

или

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (r^2 - n^2)R = 0.$$

Это уравнение называют *уравнением Бесселя.* Заметим, что оно имеет вид (1).

4 Решения уравнения Бесселя.

Пусть $n = 0$. Найдем частное решение уравнения Бесселя с помощью разложения в ряд. Пусть $R(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$, тогда уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k r^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} r^k = 0,$$

откуда $k^2 a_k = -a_{k-2}$ и $a_1 = 0$. Поэтому

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k(2k-2)(2k-4)\cdot\ldots\cdot 2)^2}a_0 = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}a_0$$
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{((2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3)^2}a_1 = 0.$$

[3] Современные кварта и квинта отличаются от пифагорейских. Приближенное равенство «семь октав = двенадцать квинт», положенное в основу пифагорейского строя, оказалось заметно неточным: $(2/3)^{12} \approx 0,0077 \neq 1/2^7 \approx 0,0078$; вообще, пифагорейская квинта несоизмерима с октавой. В современном строе октава разбита на 12 равных полутонов, а квинта — это 7 полутонов, то есть струну надо зажимать на расстоянии $(1/2)^{\frac{7}{12}} \approx 0,6674$, а не 2/3, от конца.

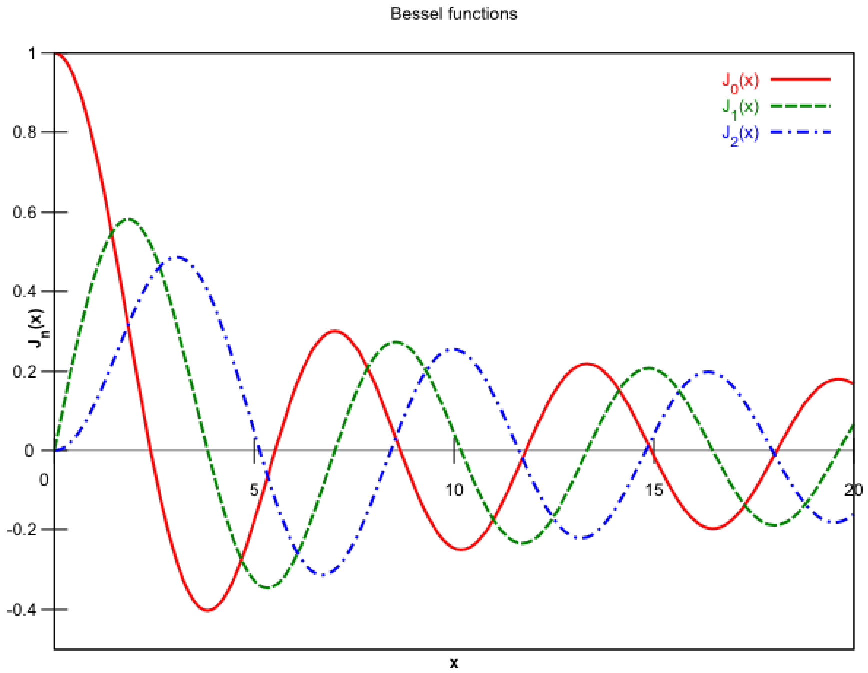


Рис. 2: Графики функций J_0, J_1 и J_2. Картинка взята со страницы Википедии «Функция Бесселя», автор — Alessio Damato.

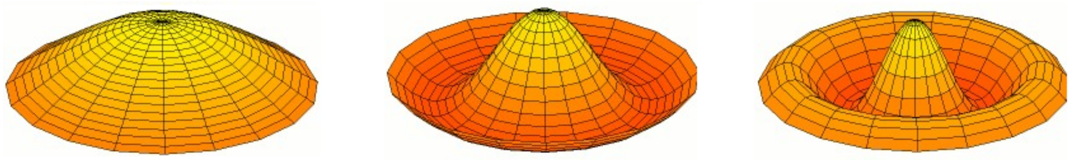


Рис. 3: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $u(t,x,y) = J_0(r)\sin t$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_0(r)$ соответственно. Анимированную версию этой и двух следующих картинок можно найти на странице английской Википедии Vibrations of a circular membrane, автор — Олег Александров.

Наложим на функцию R дополнительное условие $R(0) = 1$, то есть $a_0 = 1$. Решение уравнения с таким условием называется *функцией Бесселя нулевого порядка* и обозначается $J_0(r)$ (см. график на рис. 2, а также изображение мембраны на рис. 3). Имеем

$$J_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

Как легко доказать, ряд сходится на всей числовой оси. Все остальные решения уравнения Бесселя, ограниченные в единичном диске, пропорциональны функции[4] $J_0(r)$.

Чтобы функция Бесселя удовлетворяла граничному условию $J_0(r_0) = 0$, нужно, чтобы радиус мембраны r_0 был одним из её нулей. Поэтому у уравнения (5) может и не быть решения вида $R(r)\sin t$. И вообще, далеко не все мембраны могут колебаться с периодом 1 так, чтобы их форма оставалась инвариантной относительно поворотов.

[4]Уравнение Бесселя — это линейное уравнение второй степени, поэтому пространство его решений двумерно. Второе частное решение, не пропорциональное функции Бесселя, имеет особенность в нуле, значит, не соответствует никакому движению мембраны. Оно называется функцией Неймана (или функцией Бесселя второго рода) и обозначается $Y_0(r)$. Функцию Неймана можно искать в виде суммы ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^k$.

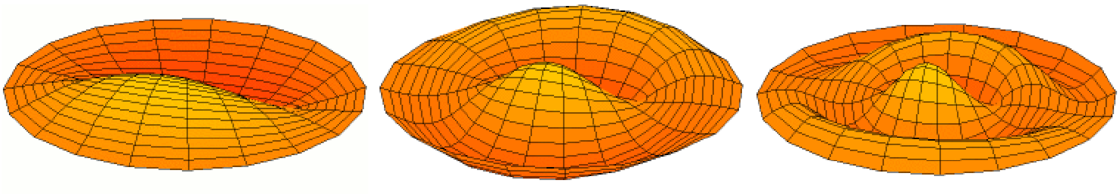


Рис. 4: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $u(t, x, y) = J_1(r)\cos\phi \sin t$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_1(r)$ соответственно.

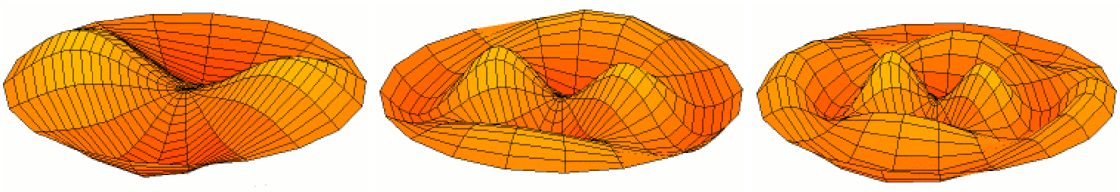


Рис. 5: Так выглядит мембрана, которая колеблется по закону $u(t, x, y) = J_2(r)\cos 2\phi \sin t$. Радиус мембраны равен первому, второму и третьему нулю функции $J_2(r)$ соответственно.

Для произвольного n частным решением уравнения (11) будет функция Бесселя порядка n:

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2k}, \tag{10}$$

см. графики на рис. 2 и изображения мембран на рис. 4, 5. Проверим это для четного n; для нечетного n рассуждение аналогично. Уравнение на функцию $J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k r^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} r^k - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k r^k = 0$$

откуда $(k^2 - n^2)a_k + a_{k-2} = 0$ и $a_0 = 0, a_1 = 0$. Получаем

$$a_{n+2k} = \frac{(-1)^k}{((2k+n)^2 - n^2)((2k+n-2)^2 - n^2) \cdot \ldots \cdot ((n+2)^2 - n^2)} a_n =$$
$$= \frac{(-1)^k}{(2k(2k+2n)) \cdot ((2k-2)(2k+2n-2)) \cdot \ldots \cdot 2(2n+2)} a_n =$$
$$= \frac{n! a_n}{k!(n+k)! 2^{2k}}$$

Все коэффициенты ряда Тейлора до a_n нулевые: при $2k + 1 < n$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(((2k)^2 - n^2)((2k-2)^2 - n^2) \cdot \ldots \cdot (2^2 - n^2))} a_0 = 0,$$
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{((2k+1)^2 - n^2)((2k-1)^2 - n^2) \cdot \ldots \cdot (3^2 - n^2)} a_1 = 0.$$

В качестве a_n возьмем $\frac{1}{n!}$. Подставляя полученные выражения в ряд $J_n(r) = \sum a_k r^k$, получим формулу (10).

Решения уравнения Бесселя для произвольного (вещественного или даже комплексного) числа n тоже называются функциями Бесселя. В этом случае они задаются формулой, похожей на (10), только факториал нужно заменить на Г-функцию:

$$J_\nu(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Теперь применим к уравнению Бесселя результаты раздела 1. Сначала воспользуемся предложением 1 и приведем уравнение Бесселя к виду $\ddot{x}+q(t)x=0$. Замена в этом случае имеет вид $R=\frac{u}{\sqrt{r}}$, и в результате получается приведенное уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left(1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{r^2}\right)u=0. \tag{11}$$

Итак, для приведенного уравнения Бесселя $q(t)=1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{t^2}$. Значит, по теореме Штурма о сравнении (см. следствие 4) у функций Бесселя $J_n(t)$ бесконечно много нулей, и при $t\to\infty$ расстояние между нулями стремится к π.

На самом деле, можно доказать более сильное утверждение: $J_n(t)=c\frac{\cos(t-\theta)}{\sqrt{t}}+O(t^{-\frac{3}{2}})$ для некоторых c,θ.

Пользуясь теоремой Штурма о сравнении, можно доказать также, что если $n<m$, то между нулями функции $J_m(r)$ всегда есть нуль функции $J_n(r)$.

5 Задача Штурма–Лиувилля.

На примере уравнения колебаний мембраны мы видели, что большое значение имеют нули решения уравнения (1). Это мотивирует такую задачу: *найти решения уравнения* (1)*, удовлетворяющие условиям* $x(a)=0,x(b)=0$. Решение с такими граничными условиями может и не существовать, в отличие от решения дифференциального уравнения с обычными начальными условиями $x(a)=x_1,x'(a)=y_1$, которое существует всегда.

Задачей Штурма–Лиувилля называется уравнение

$$\ddot{x}+(Q(t)+\lambda R(t))\,x=0 \tag{12}$$

$$x(a)=0,x(b)=0 \tag{13}$$

Здесь функции Q,R непрерывны на $[a,b]$ и $R(t)>0$. Значения λ, при которых уравнение имеет ненулевое решение, называются *собственными значениями* задачи Штурма – Лиувилля.

Оказывается, множество собственных значений дискретно и имеет вид $\{\lambda_0,\lambda_1,\dots\}$, где $\lambda_i<\lambda_{i+1}$, $\lambda_n\to\infty$. Каждому значению λ_i соответствует единственное (с точностью до домножения на константу) решение $x_i(t)$.

Как и в доказательстве теоремы Штурма о сравнении, домножим уравнение (12) при $\lambda=\lambda_l$ на $x_k(t)$, а уравнение (12) при $\lambda=\lambda_k$, — на $x_l(t)$, вычтем и проинтегрируем по $[a,b]$. Мы получим, что

$$\int_a^b(\lambda_l-\lambda_n)R(t)x_l(t)x_k(t)dt=0.$$

Значит, решения с разными номерами $l\neq k$ ортогональны с весом $R(t)$ на отрезке $[a,b]$. Из теоремы Штурма также следует, что с ростом n количество нулей решения $x_n(t)$ на отрезке $[a,b]$ растёт.

Примечание 5. *Из курса линейной алгебры известно, что собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны. Напрашивается аналогия с решениями уравнения* (12) *для разных собственных значений* λ*. Эта аналогия не случайна. Функции* x_n *и числа* λ_n *являются собственными векторами и собственными значениями некоторого самосопряженного оператора* ***в бесконечномерном пространстве*** *— а именно, оператора*

$$x\mapsto\frac{1}{R(t)}(-\ddot{x}+Q(t)x)$$

в пространстве функций.

Мы не будем заниматься общей задачей Штурма–Лиувилля, а ограничимся одним примером (см. след. раздел).

6 Полиномы Лежандра.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dx}{dt}\right)+\lambda x=0. \tag{14}$$

В силу предложения 1, оно приводится к виду (12) с $R(t)\equiv 1$. Оказывается (это можно проверить методом разложения в ряд), решения этого уравнения ограничены на отрезке $[-1,1]$ только для $\lambda = n(n+1)$, и в этом случае задаются полиномами. Так как эти полиномы ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $R(t)\equiv 1$, они совпадают с известными полиномами Лежандра (аккуратное доказательство этого факта мы оставляем читателю).

Определение 6. *Полиномы Лежандра* — это система полиномов $P_n(t)$, для которых

- P_n имеет степень n;
- $\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = 0$ при $n\neq m$;
- $P_n(1)=1$.

Полиномы Лежандра можно получить, взяв набор многочленов $1, t, t^2, \ldots$ и ортогонализовав его методом Грама – Шмидта.

Приведем еще три определения полиномов Лежандра. Доказательство эквивалентности всех определений мы оставляем читателю (см. подсказки в конце раздела).

- Рекуррентная формула для полиномов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t).$$

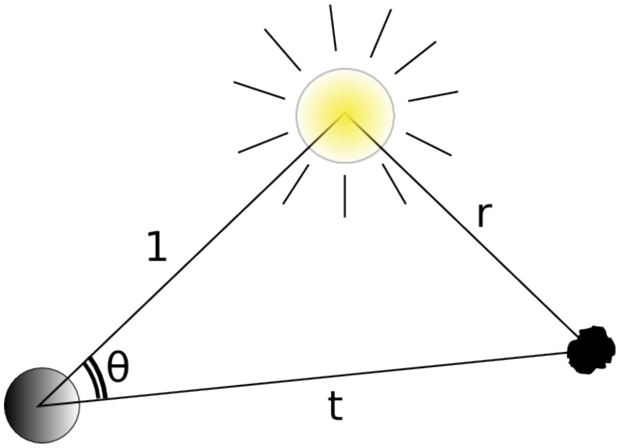
- Формула Родрига для полиномов Лежандра:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right].$$

- Производящая функция для полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)u^n.$$

Примечание 7. *Последнее определение появилось в работах Лежандра по небесной механике. Если наблюдатель (Лежандр), находясь на Земле, видит два небесных тела на угловом расстоянии θ, расстояние до первого тела равно* 1, *а до второго — t, то расстояние между этими небесными телами равно $r=\sqrt{1-2tu+t^2}$, где $u=\cos\theta$. Полиномы Лежандра — это коэффициенты в разложении Ньютоновского потенциала $U(r)=\frac{1}{r}$ по степеням u.*



Если сделать в уравнении (14) замену $t = 1 - \frac{r^2}{2n^2}$, получится «почти» уравнение Бесселя: действительно, $\frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dr}\frac{n^2}{r}$, и

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dx}{dt}\right) + n(n+1)x = -\frac{d}{dt}\left((2-\frac{r^2}{2n^2})\frac{r^2}{2n^2}\frac{dx}{dr}\frac{n^2}{r}\right) + n(n+1)x =$$
$$= -\frac{d}{dt}\left((2-\frac{r^2}{2n^2})\frac{r}{2}\frac{dx}{dr}\right) + n(n+1)x = \frac{n^2}{r}\frac{d}{dr}\left((1-\frac{r^2}{4n^2})r\frac{dx}{dr}\right) + n(n+1)x =$$
$$= n^2\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dx}{dr}\cdot(1-\frac{r^2}{4n^2})\right] + (1+\frac{1}{n})x\right). \quad (15)$$

При $n \to \infty$ в скобках получается левая часть уравнения Бесселя. Поэтому неудивительно, что полиномы Лежандра связаны с функцией Бесселя J_0:

Задача 1 (Формула Мелера–Гейне, Mehler–Heine formula)**.** *Докажите, что* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(1-\frac{r^2}{2n^2}) = J_0(r)$.

Кроме полиномов Лежандра, есть еще несколько замечательных систем ортогональных многочленов — например, полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита. Подробнее о теории ортогональных многочленов можно прочитать в книге Г. Сегё "Ортогональные многочлены".

Подсказки к задачам о полиномах Лежандра

Чтобы проверить ортогональность полиномов, заданных формулой Родрига, достаточно взять интеграл несколько раз по частям. Равенство $P_n(t) = 1$ для формулы Родрига тоже легко проверяется, если применить формулу для n-й производной произведения и заметить, что $\frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=1}(t-1)^n$ равно нулю при $k < n$.

Рекуррентную формулу легко вывести из формулы Родрига.

Производящую функцию можно получить, если в ряде $F(t,u) = \sum P_n(t)u^n$ вместо P_n подставить его выражение из рекуррентной формулы. Мы получим дифференциальное уравнение на F, решением которого и будет $\frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}}$.

Чтобы получить формулу Мелера–Гейне, нужно сначала доказать несколько вспомогательных утверждений:

- Интегральное представление полиномов Лежандра:

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta$$

  Эту формулу можно проверить, раскрыв по биному Ньютона и подынтегральное выражение, и $(t^2-1)^n$ в формуле Родрига.

- Производящая функция для функций Бесселя:

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$$

  Это можно доказать, разложив функции $J_n(z)$ и функцию $e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ в степенные ряды. Если в это равенство вместо t подставить $-\frac{1}{t}$, будет видно, что $J_n = (-1)^n J_{-n}$.

- $\cos(z\cos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)(-1)^n\cos 2n\theta$.

  Это вещественная часть предыдущего равенства при $t = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ (тут нужно использовать равенство $J_n = (-1)^n J_{-n}$).

Из интегрального представления полиномов Лежандра несложно получить формулу

$$P_n\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{iz}{n}\cos\theta + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(iz\cos\theta)d\theta + o(1)$$

Вещественная часть подынтегральной функции равна $\cos(z\cos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)(-1)^n\cos 2n\theta$. Проинтегрировав этот ряд почленно, получим, что

$$P_n\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right) = J_0(z) + o(1),$$

что и требовалось доказать.

7 Полиномы Якоби и общий случай формулы Мелера–Гейне.

Этот раздел посвящен обобщению задачи 1, точнее, выкладки (15).

Определение 8. Полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}$ — это система полиномов, удовлетворяющих таким свойствами:

- Полином $P_n^{\alpha,\beta}$ имеет степень n;
- Для $n \neq m$ полиномы $P_n^{\alpha,\beta}$ и $P_m^{\alpha,\beta}$ ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$;
- $P_n^{\alpha,\beta}(1) = C_{n+\alpha}^n$.

Сравнивая это определение с определением 6, можно заключить, что $P_n^{0,0}$ — это полином Лежандра P_n. Как и полиномы Лежандра, полиномы Якоби можно строить как решения дифференциального уравнения второго порядка:

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)\,\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0. \tag{16}$$

Для полиномов Якоби верно обобщение формулы Мелера-Хейне:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} P_n^{\alpha,\beta}\left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z). \tag{17}$$

Мы не будем доказывать это.

Упражнение 2. *Проверьте, что уравнение Штурма–Лиувилля на функцию* $P_n^{\alpha,\beta}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)$ *при* $n\to\infty$ *сходится к функции* $\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(z)$..

Решение упражнения

Проверим, что уравнение на $z^{\alpha/2}P_n^{\alpha,\beta}\left(1-\frac{z}{2n^2}\right)$ сходится к уравнению на $J_\alpha(\sqrt{z})$.

Для начала в уравнении (9) перейдем к переменной $z, r^2 = z$, и получим уравнение на функцию $J_\alpha(\sqrt{z})$. Так как $R'_r = 2rR'_z$ и $R''_{rr} = 4r^2R''_{zz} + 2R'_r$, уравнение примет вид

$$(4zR''_{zz} + 2R'_z) + 2R'_z + \left(1 - \frac{\alpha^2}{z}\right)R = 0$$

то есть уравнение на $J_\alpha(\sqrt{z})$ имеет вид

$$zR''_{zz} + R'_z + \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4z}\right)R = 0 \tag{18}$$

Теперь перейдём в уравнении (16) к координате z, для которой $x = 1 - \frac{z}{2n^2}$. Так как

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}(-2n^2)$$

получаем

$$\left(2\,\frac{z}{2n^2} - \frac{z^2}{4n^4}\right)4n^4u''_{zz} + \left(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2) + \frac{z}{2n^2}(\alpha+\beta+2)\right)(-2n^2)\,u'_z + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0.$$

Если разделить уравнение на $4n^2$ и перейти к пределу при $n\to\infty$, мы получим более простое выражение

$$zu''_{zz} + (\alpha+1)\,u'_z + \frac{1}{4}u = 0. \tag{19}$$

Выпишем уравнение на $w(z) = u(z)z^{\alpha/2}$, пользуясь тем, что $u'_z = z^{-\frac{\alpha}{2}}w'_z - \frac{\alpha}{2}z^{-\frac{\alpha}{2}-1}w$:

$$z\left(z^{-\frac{\alpha}{2}}w''_{zz} - 2\cdot\frac{\alpha}{2}z^{-\frac{\alpha}{2}-1}w'_z + \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\frac{\alpha}{2}z^{-\frac{\alpha}{2}-2}w\right) + (\alpha+1)(z^{-\frac{\alpha}{2}}w'_z - \frac{\alpha}{2}z^{-\frac{\alpha}{2}-1}w) + \frac{1}{4}z^{-\frac{\alpha}{2}}w = 0.$$

Приводя подобные и умножая уравнение на $z^{\frac{\alpha}{2}}$, мы приходим к уравнению

$$zw''_{zz} + w'_z + \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4z}\right)w = 0,$$

которое совпадает с уравнением (18). Итак, мы показали, что уравнения на функции $z^{\alpha/2}P_n^{\alpha,\beta}\left(1-\frac{x^2}{2n^2}\right)$ сходятся к уравнению на функцию $J_\alpha(z)$.

Доказательство самой формулы (17) можно найти в книге Г. Сегё "Ортогональные многочлены".