2 Экспонента и фазовый поток

2.1 Абстрактный фазовый поток.

В разделе 8 главы 1, «Фазовые потоки», мы определили фазовый поток векторного поля. Здесь мы дадим определение абстрактного фазового потока. Правда, оказывается, что определения эквивалентны: любой фазовый поток является потоком какого-то векторного поля, и наоборот. Это видно из теорем 2.7 и 2.8 (см. ниже).

Определение 2.1. *Фазовый поток* — это однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

Сейчас мы объясним, что означают все слова, входящие в это определение.

Определение 2.2. *Диффеоморфизм* — это взаимно-однозначное отображение $f\colon \Omega \to \Omega'$, $\Omega, \Omega' \in \mathbb{R}^n$, непрерывно дифференцируемое вместе с обратным.

На языке координат, такое отображение имеет вид

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)),$$

то есть задаётся n функциями n переменных. Дифференцируемость f — это дифференцируемость всех функций $f_1, \dots, f_n$.

С дифференцируемым отображением f во всякой точке x_0 связаны

- его дифференциал $df|_{x_0}$ — линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, для которого $f(x) = f(x_0) + df|_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|)$
- его матрица Якоби — матрица этого линейного отображения. Коэффициенты матрицы Якоби — частные производные функций f_i по переменным x_j. Определитель матрицы Якоби называется якобианом.

Отступление: проблема якобиана

Пусть $P\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — полиномиальное отображение[3]. Предположим, что якобиан отображения P в каждой точке ненулевой. Верно ли, что отображение биективно?

Эта проблема носит название «проблема якобиана» (Jacobian problem). Проблему впервые сформулировал Ott-Heinrich Keller в 1939 году. Она входит в список Стивена Смейла (2000). Несмотря на многочисленные попытки решить проблему якобиана и большое количество ошибочных доказательств, она остается открытой.

Теперь дадим более полное определение фазового потока, из которого, в частности, ясно, что такое «однопараметрическая группа».

Определение 2.3. *Фазовый поток* — это однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $g^t\colon \Omega \to \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, для которого

[3]то есть заданное парой полиномов: $(z, w) \mapsto (P_1(z, w), P_2(z, w))$

- $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ (групповое свойство)
- $g^0 = id$ (нулевому значению параметра соответствует нулевое отображение)
- Отображение $t \mapsto g^t(x)$ является C^1–гладким при любом x.

Примечание 2.4. *В частности, разные отображения нашего семейства коммутируют:*

$$g^t \circ g^s = g^s \circ g^t = g^{t+s}.$$

Пример 2.5. *Фазовыми потоками являются:*

1. $g^t \equiv id$;
2. *Сдвиги:* $g^t : x \mapsto x + at$;
3. $g^t : x \mapsto e^{At}x$ *для любой матрицы* A *(это будет доказано ниже).*
4. *Повороты:* $g^t : z \mapsto e^{it}z$ *— поворот комплексной плоскости на угол* t.

2.2 Фазовые потоки и отображения потока векторного поля.

В этом разделе мы установим связь между фазовыми потоками и векторными полями. Окажется, что любой фазовый поток есть поток какого-то векторного поля (теорема 2.7) и наоборот (теорема 2.8). Для начала напомним, что такое фазовый поток векторного поля. Если наше векторное поле — поле скоростей течения в реке, то естественно задать два вопроса:

1. **Если бросить в реку (в точку x) щепку, по какой траектории она поплывёт?** На этот вопрос отвечает решение дифференциального уравнения $t \mapsto \varphi(t, x)$ с начальным условием $\varphi(0, x) = x$.
2. **Куда за минуту уплывут все точки?** На этот вопрос отвечает отображение $x \mapsto \varphi(1, x)$ — отображение потока за время 1.

Определение 2.6. *Генератор* фазового потока — это такое векторное поле v на области Ω, что

$$\left.\frac{dg^t(x)}{dt}\right|_{t=t_0} = v(g^{t_0}(x)) \tag{2.10}$$

Другими словами, отображение $t \mapsto g^t(x)$ есть решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x (докажите, что это равносильно формуле (2.10)!).

Теорема 2.7. *Всякий фазовый поток* g^t *имеет генератор.*

В терминах раздела 8 «Фазовые потоки», «всякий фазовый поток является фазовым потоком какого-то векторного поля».

Доказательство теоремы 2.7. Положим $v(x) := \frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=0}$. Если генератор существует, то он не может быть ничем другим: это следует из формулы (2.10) для $t = 0$. Проверим формулу (2.10) для произвольного $t = t_0$.

$$\frac{d}{dt}g^t(x)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}g^{t+t_0}(x)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}g^t \circ g^{t_0}(x)\bigg|_{t=0} = v(g^0(g^{t_0}(x))) = v(g^{t_0}(x)).$$

Отсюда следует, что поле v — генератор потока g^t. □

Теперь докажем обратное утверждение: отображения за время t любого векторного поля образуют фазовый поток. В терминах раздела 8 «Фазовые потоки», «фазовый поток векторного поля является фазовым потоком».

Теорема 2.8. *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = v(x),\ x \in \Omega,\ v \in C^2(\Omega).$$

Пусть все его решения определены на $\mathbb{R}$. Пусть $\varphi(t,x)$ — решение уравнения с начальным условием x, то есть $\varphi(0,x) = x$. Тогда отображения за время t

$$g^t \colon x \to \varphi(t,x)$$

образуют фазовый поток.

Доказательство. Мы будем пользоваться следующей теоремой. Доказательство будет дано в седьмой лекции весеннего семестра.

Теорема 2.9 (Теорема о гладкости)**.** *В условиях теоремы 2.8, отображение g^t гладко.*

Докажем свойства из определения 2.3.

- Групповое свойство $g^{t+s}(x) = g^t \circ g^s(x)$: пусть $y = \varphi(s,x)$ и $z = \varphi(t,y)$; ясно, что тогда $z = \varphi(t+s,x)$ (ср. с предложением 8.5 из раздела 8). Значит,
$$g^{t+s}(x) = \varphi(t+s,x) = z = \varphi(t,y) = g^t \circ g^s(y).$$
По теореме о гладкости, g^t гладкое отображение. В силу группового свойства, $g^{-t} = (g^t)^{-1}$. То есть у отображения g^t гладкое обратное отображение. Поэтому g^t — диффеоморфизм.
- $g^0 = id$: это непосредственно следует из определения g^t.
- Гладкость отображения $t \mapsto g^t(x)$: видно, что его производная $\frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=t_0} = v(g^{t_0}(x))$ непрерывна.

□

Примечание 2.10. *Если решения дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ определены не при всех t, вместо фазового потока естественным образом возникает локальный фазовый поток: семейство отображений $g^t(x)$, определенных не для всех пар (t,x).*

2.3 Линейные фазовые потоки.

Следующая теорема показывает, что линейные фазовые потоки в точности соответствуют линейным векторным полям.

Теорема 2.11. *1. Пусть $g^t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ —* **линейный** *фазовый поток (каждое отображение g^t линейно). Тогда существует матрица A, для которой $g^t = e^{At}$.*

2. Наоборот, для каждого оператора $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ семейство отображений $\{e^{At} \mid t \in \mathbb{R}\}$ — фазовый поток.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 2.7. Действительно, так как g^t линейно по x, его генератор $v(x) = \frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{g^t(x)-x}{t}$ тоже линеен по x (последовательность линейных операторов может сходиться только к линейному оператору). Значит, генератором потока g^t является поле вида $v(x) = Ax$. По основной теореме предыдущего раздела, решением уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x является функция $\varphi(t) = e^{At}x$. По определению генератора, $g^t(x) = \varphi(t) = e^{At}x$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение теоремы сразу следует из теоремы 2.8. Заметим, что для такого семейства теорема гладкости не нужна: отображения e^{At} линейные, а потому гладкие. Так что теорема доказана полностью (а теорема 2.8 — только по модулю теоремы о гладкости).

Впрочем, можно и не ссылаться на общую теорему 2.8, а просто проверить, что все отображения e^{At} — диффеоморфизмы и удовлетворяют трём требованиям определения 2.3. Это несложное упражнение мы оставляем читателю. □

2.4 Теорема об изоморфизме, ФСР и ФМР.

Как мы уже видели в разделе 6.3 главы 1, решения линейного одномерного уравнения образуют векторное пространство. В этом разделе мы докажем следующую теорему

Теорема 2.12 (Теорема об изоморфизме)**.** *Решения уравнения $\dot{x} = Ax$ образуют векторное пространство, изоморфное $\mathbb{R}^n$. Один из возможных изоморфизмов — отображение $I\colon \varphi \to \varphi(0)$ (каждое решение отображается в своё начальное условие).*

Доказательство. Если сложить два решения или умножить решение на число, мы снова получим решение уравнения. Это следует из формулы $x(t) = e^{At}x(0)$ и из линейности e^{At} (впрочем, можно не пользоваться этой формулой, а просто проверить, что сумма двух решений удовлетворяет дифференциальному уравнению). Значит, решения образуют векторное пространство.

Теперь исследуем отображение $I\colon \varphi \to \varphi(0)$. Ясно, что оно линейно: $(\varphi_1 + \varphi_2)(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)$ и $(C\varphi)(0) = C\varphi(0)$. Из теоремы существования решения следует, что I эпиморфно (образ I — всё пространство $\mathbb{R}^n$). Действительно, в каждую точку $x \in \mathbb{R}^n$ переходит решение с начальным условием x. Из теоремы единственности решения следует, что I инъективно, то есть у разных решений не могут совпадать начальные условия.

Итак, I — линейная биекция пространства решений на $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что пространство решений изоморфно $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 2.13. Базис в пространстве решений линейного уравнения называется *фундаментальной системой решений (ФСР)* этого уравнения.

Определение 2.14. *Фундаментальная матрица решений (ФМР)* — матрица, зависящая от t, по столбцам которой написаны координаты решений из ФСР.

Пример 2.15. *Пусть матрица A в базисе $e_1, \ldots, e_n$ диагональна, и на диагонали стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда соответствующая линейная система имеет вид $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$, и т.д. Поэтому в качестве ФСР можно взять набор функций*

$$\{e^{\lambda_1 t} e_1, \ldots, e^{\lambda_n t} e_n\}$$

Произвольное решение уравнения представимо в виде линейной комбинации базисных решений: $\varphi(t) = \sum c_j e^{\lambda_j t} e_j$.

В базисе $e_1, \ldots, e_n$ решения имеют координаты $(e^{\lambda_1 t}, 0, \ldots, 0)$, $(0, e^{\lambda_2 t}, 0 \ldots, 0)$, и т.д. Значит, ФМР в этом базисе — диагональная матрица с коэффициентами $e^{\lambda_i t}$ на диагонали. Заметим, что она совпадает с e^{At}.

Оказывается, что и в общем случае e^{At} является ФМР линейного уравнения. Действительно, в качестве ФСР можно взять решения с начальными условиями $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ и т.д. Тогда по основной теореме раздела 1 «Экспонента линейного оператора» эти решения равны $e^{At} e_1$, $e^{At} e_2$, и т.д. Но если матрицу умножить на вектор e_k, мы получим её k-й столбец. Поэтому координаты решений — в точности столбцы матрицы e^{At}. Это и значит, что e^{At} является ФМР линейного уравнения.