МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Конспект курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», часть I

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук,
Ю. С. Ильяшенко

Москва, 2012

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко

Конспект курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», часть I

Пособие содержит подробную запись шести первых лекций курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», прочитанного Ю. С. Ильяшенко и А. И. Буфетовым в 2010/2011 учебном году. Большое внимание уделено геометрическому подходу к теории дифференциальных уравнений. Текст снабжён большим количеством иллюстраций. Изложение сопровождается задачами для самостоятельного решения.

© Механико-математический факультет МГУ, 2012

Оглавление

1. Дифференциальные уравнения в механике 6
   1.1. Задача о равномерном спуске 6
   1.2. Уравнения Ньютона 8
   1.3. Фазовый портрет уравнения Ньютона . . . 9
2. Методы решения ДУ 13
   2.1. Метод разложения в ряд 14
   2.2. Метод Эйлера 15
   2.3. Метод Пикара 18
   2.4. Метод разделения переменных 20
3. Как доказывать единственность решения 21
4. Понятие одномерного ДУ 24
   4.1. Определения 24
   4.2. Поля направлений и их интегральные кривые 24
   4.3. Связь ДУ с полями направлений 27
5. Автономные уравнения на прямой 30
   5.1. ДУ, правая часть которых зависит только от времени 31
   5.2. Определение автономного ДУ на прямой . 36
   5.3. Решение автономного ДУ на прямой 37
   5.4. Единственность решения автономного ДУ на прямой 41
6. Многомерные ДУ 44
   6.1. Определения 45
   6.2. Уравнения высших порядков 46
   6.3. Фазовый портрет автономного уравнения . 48
7. Метод разделения переменных 51
   7.1. Связь фазовых и интегральных кривых . . 51
   7.2. Метод разделения переменных 54
   7.3. Доказательство теоремы 7.2 55
8. Фазовые потоки 56
9. Линейные уравнения на прямой 63
   9.1. Линейные однородные одномерные уравнения 64
   9.2. Линейные неоднородные одномерные уравнения 65

9.3. Метод вариации постоянной 67
9.4. Преобразование потока неавтономного уравнения 69
9.5. Преобразования потока линейных уравнений на прямой 69
9.6. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами 70
10. Симметрии уравнений 74
10.1. Однородные уравнения 74
10.2. Общий случай 76
11. Дифференциальные формы 79
11.1. ДУ, заданные дифференциальными формами 79
11.2. Уравнения в полных дифференциалах и лемма Пуанкаре 81
11.3. Интегрирование дифференциальных форм 84
11.4. Еще одно обоснование метода разделения переменных 85
11.5. Доказательство леммы Пуанкаре 86
11.6. Замкнутая, но не точная дифференциальная форма 87
12. Полные дифференциалы 87
12.1. Решение уравнений в полных дифференциалах 87
12.2. Интегрирующий множитель 88
12.3. Уравнение Бернулли (частный случай) . . 89
12.4. Система Лотки—Вольтерры 90
13. Первые интегралы 94
13.1. Уравнения Гамильтона 97
13.2. Уравнения Ньютона 98
13.3. Физический маятник 99
13.4. Модифицированный физический маятник . 101
13.5. Математический маятник 102
13.6. Малые колебания 105
14. Дополнение 110

Дорогой читатель!

Перед Вами — запись нескольких первых лекций курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», прочитанного Ю. С. Ильяшенко и А. И. Буфетовым в 2010/2011 учебном году.

Мы глубоко благодарны студентам, любезно предоставившим свои конспекты, и Денису Епишеву, который осуществил черновой набор текста. Ваши замечания и предложения мы просим высылать нам по адресу `ode_conspect@dyn-sys.org`.

С искренним уважением,

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко.

1. Дифференциальные уравнения в механике

Второй закон Ньютона позволяет выразить ускорение материальной точки через силы, которые на неё действуют. Во многих случаях эти силы зависят только от положения и скорости материальной точки. Пусть $(x(t), y(t), z(t))$ — координаты материальной точки в момент времени t. Тогда второй закон Ньютона — это уравнение на неизвестные функции $x(t), y(t), z(t)$, в которое входят производные этих функций по t второго порядка (ускорение), первого порядка (скорость) и значения этих функций. Это уравнение — пример *обыкновенного дифференциального уравнения*[1)].

Решить такое дифференциальное уравнение — значит найти неизвестные функции $x(t), y(t), z(t)$, то есть найти положение точки в каждый момент времени. Правда, для этого нужно знать положение и скорость материальной точки в начальный момент времени. Эта дополнительная информация называется *начальными условиями.*

В этом параграфе мы изучим два дифференциальных уравнения, возникающих из задач механики.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

1.1. Задача о равномерном спуске. В 1687 году немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц поставил следующую задачу.

Задача. *Найти такую кривую, что тяжелая точка под действием силы тяжести равномерно опускается по этой кривой.*

Условие задачи предполагает, что точка движется по кривой, расположенной в некоторой вертикальной плоскости; введем в этой плоскости систему координат, в которой ось абсцисс направлена горизонтально, а ось ординат — вертикально вверх. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — координаты точки в момент времени t, а $(u(t), v(t)) = (\dot{x}, \dot{y})$ — двумерный вектор её скорости.

[1)] Строгое определение дифференциального уравнения можно найти в разделе 4.1 для одномерного случая и в разделе 6.1 — для многомерного.

1.1. Задача о равномерном спуске

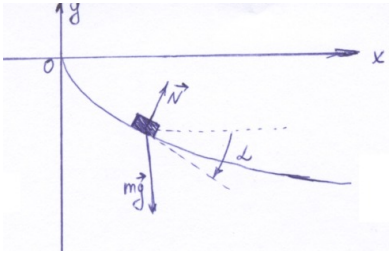

Рис. 1. Материальная точка спускается по кривой. На рисунке $\alpha < 0$.

Точка должна опускаться равномерно, то есть вертикальная компонента её скорости должна быть постоянна: $v(t) \equiv v$. Значит, вертикальная компонента ускорения равна нулю: $\vec{a} = (\dot{u}, \dot{v}) = (\dot{u}, 0)$.

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила нормальной реакции опоры $\overrightarrow{N}$, направленная по нормали к кривой (см. рис. 1). Запишем второй закон Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{N}$ для горизонтальной и вертикальной компонент ускорения:

$$\begin{cases} m\dot{u} = -N\sin\alpha \\ \quad 0 = N\cos\alpha - mg. \end{cases}$$

Здесь $N = |\overrightarrow{N}|$ — величина силы нормальной реакции опоры, а угол α — угол наклона касательной к кривой: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{u}$. Исключим N:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{m\dot{u}}{mg}$$

Сравнивая это равенство с равенством $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{u}$, получим следующее уравнение на функцию $u(t)$:

$$\dot{u} = \frac{K}{u}. \tag{1}$$

Здесь $K = -gv$ — постоянный (положительный) коэффициент.

Умножим обе части равенства (1) на u. Получим

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)' = K.$$

Итак, производная функции $\frac{u^2}{2}$ постоянна, то есть эта функция линейна: $u^2(t) = 2Kt + C$, где C — некоторая константа.

Будем считать, что $u(0) = 0$ (то есть в начальной точке кривой касательная к кривой вертикальна). Тогда $u^2(t) = 2Kt$, и

$$u(t) = \sqrt{2K}\sqrt{t}.$$

Теперь найдем кривую, по которой движется материальная точка. Будем считать, что $x(0) = y(0) = 0$ (кривая начинается в начале координат). Функцию $x(t)$ можно найти, проинтегрировав найденную функцию $u(t) = \dot{x}(t)$:

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau = K_1 t^{\frac{3}{2}};$$

здесь $K_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2K}$.

Так как точка опускается по кривой равномерно, то $y(t) = vt$; поэтому уравнение кривой имеет вид

$$x = K_2(-y)^{\frac{3}{2}}$$

(здесь $K_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2K}(-v)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2g}}{v}$).

Таким образом, тяжелая точка будет опускаться равномерно по полукубической параболе $x^2 = Cy^3$.

Упражнение 1. *Какой ответ в задаче Лейбница получится, если не предполагать, что $u(0) = 0$?*

1.2. Уравнения Ньютона. Пусть материальная точка движется по прямой под действием силы F, причём величина этой силы зависит только от положения точки на прямой: $F = F(x)$.

В силу второго закона Ньютона,

$$m\ddot{x} = F(x). \tag{2}$$

Домножим обе части равенства на величину скорости точки $\dot{x}$.

$$m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x} \tag{3}$$

Выражение в левой части равенства (3) — это производная по времени от *кинетической энергии* материальной точки $m\dot{x}^2/2$.

Пусть $U(x)$ — это функция, заданная равенством $\frac{dU}{dx} = -F(x)$. Функция $U(x)$ называется *потенциальной энергией* материальной точки. Тогда

$$F(x)\dot{x} = -\frac{d}{dt}U(x),$$

то есть правую часть равенства (3) мы тоже представили в виде производной по времени. Итак,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{d}{dt}U(x).$$

Поэтому сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = const \tag{4}$$

Величина E называется *полной энергией* материальной точки, а последнее соотношение есть не что иное, как закон сохранения энергии.

Задача 2. *Придумайте, как при помощи уравнения* (4) *найти функцию $x(t)$ — закон движения материальной точки.*

Решение этой задачи мы приведём позже (в конце пункта 13.3.2).

1.3. Фазовый портрет уравнения Ньютона. В этом разделе мы ограничимся неформальным описанием фазовых портретов для уравнений Ньютона. Строгие определения мы дадим позже (см. раздел 6.3).

Введем функцию $v(t) = \dot{x}(t)$ — скорость материальной точки. О функциях $x(t)$ и $v(t)$ мы знаем, что $\dot{x}(t) = v(t)$ (по определению функции v) и $\dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = F(x(t))$. Значит, нам известен вектор скорости кривой $x(t), v(t)$ в каждой её точке: $(\dot{x}(t), \dot{v}(t)) = (v, F(x))$.

Изобразим в каждой точке (x, v) плоскости Oxv вектор $(v, F(x))$. Полученная картинка называется *векторным полем.*

Про кривую $(x(t), v(t))$ нам известно, что она в каждой своей точке касается вектора, нарисованного в этой точке. Такие кривые на плоскости Oxv называются *фазовыми кривыми* векторного поля. На рисунках на каждой фазовой кривой изображают стрелочку, которая показывает направление роста t.

Понятие фазовых кривых векторного поля очень наглядно. Если на поверхности ручья рассмотреть векторное поле скоростей течения и пустить в ручей бумажный кораблик, то он поплывет по фазовой кривой этого векторного поля (см. рис. 2).

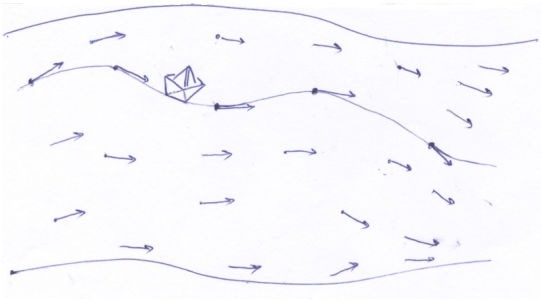

Рис. 2. Векторное поле скоростей течения и его фазовая кривая — траектория кораблика

Итак, каждому решению уравнения $\ddot{x} = F(x)$ соответствует фазовая кривая векторного поля $(v, F(x))$. На самом деле, верно и обратное; точное утверждение можно найти в разделе 6.3.

Фазовые кривые не дают полной информации о движении точки, потому что по ним не виден характер зависимости x от t. Можно было бы рисовать кривые $(t, x(t), \dot{x}(t))$, но они расположены в трёхмерном пространстве, и это существенно усложняет рисунок.

В предыдущем разделе мы (почти) нашли фазовые кривые для уравнений Ньютона. А именно, мы установили (см. уравнение (4)), что каждая фазовая кривая содержится в кривой $\frac{mv^2}{2} + U(x) = c$ для некоторого c.

В следующих пунктах мы приведём несколько примеров уравнений Ньютона и нарисуем их фазовые портреты. Мы не будем строго обосновывать правильность наших рисунков. Для физического маятника такое обоснование можно найти в разделе 13.3.

1.3.1. Физический маятник. Этот пример подробно рассмотрен в разделе 13.3.

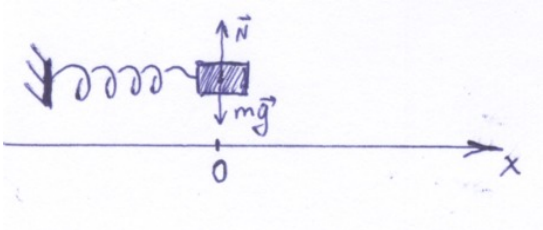

Рис. 3. Физический маятник в положении равновесия

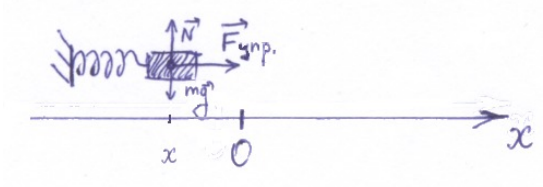

Рис. 4. Физический маятник: пружина сжата

Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -x$. Это уравнение описывает колебания *физического маятника* — пружины, один из концов которой закреплен, а к другому прикреплен грузик (см. рис. 3–4). Действительно, по закону Гука сила упругости $F_{\text{упр}}$ пропорциональна отклонению x нашего грузика от положения равновесия: $F_{\text{упр}} = -kx$.

После введения переменной v мы получим уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x \end{cases} \tag{5}$$

Соответствующее векторное поле изображено на рис. 5: в

Рис. 5. Векторное поле и фазовый портрет физического маятника

точке (x, v) нарисован вектор $(v, -x)$. Из соображений наглядности мы рисовали векторы $\frac{1}{2}(v, -x)$ вместо $(v, -x)$, иначе разные векторы пересекались бы и рисунок был бы непонятным[1)].

В силу результатов предыдущего раздела, фазовые кривые $(x(t), v(t))$ должны лежать на кривых $\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$ — на окружностях (так как в данном случае потенциальная энергия системы равна $U(x) = \frac{x^2}{2}$). Подберём решения уравнения $\ddot{x} = -x$. Ясно, что функции $\sin x$ и $\cos x$, а также их линейные комбинации, удовлетворяют такому уравнению. Значит, функции

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t \\ v(t) = -x_0 \sin t + v_0 \cos t \end{cases}$$

являются решениями уравнения (здесь x_0 и v_0 — положение и скорость точки в начальный момент времени).

Примечание 1.1. *На самом деле, у нашего уравнения нет других решений. Доказательство этого факта мы дадим позже, в разделе 13.3.*

Несколько фазовых кривых $(x(t), v(t))$ изображено на рис. 5. Все эти кривые — окружности с центром в нуле. Единственное исключение — фазовая кривая $x(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$, которая представляет собой точку $(0, 0)$ и соответствует положению равновесия грузика.

Итак, фазовые кривые $(x(t), v(t))$ действительно лежат на окружностях $\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$ и действительно касаются векторного поля $(v, -x)$.

1.3.2. Физический маятник с трением. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -x - \dot{x}$. Это уравнение описывает физический маятник, погруженный в вязкую жидкость: на грузик, кроме силы упругости со стороны пружины, действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}}$, пропорциональная скорости его движения $\dot{x}$. Это уравнение уже не имеет вида (2), и соображения раздела 1.2 для него не действуют. Но решения уравнения можно подобрать: они будут линейными комбинациями произведений вида

[1)] В дальнейшем мы всегда будем рисовать векторные поля таким образом.

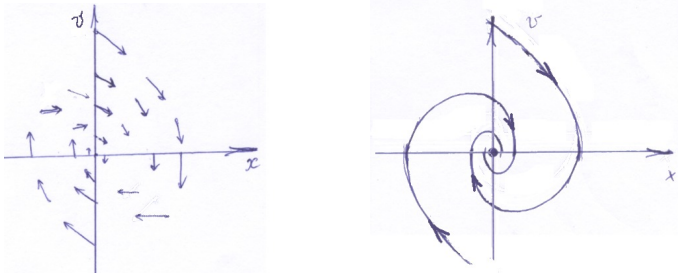

Рис. 6. Векторное поле и фазовый портрет для физического маятника с вязким трением

$e^{at}\cos bt$ и $e^{at}\sin bt$ для некоторых a и b. Мы не будем приводить формулу (читатель может подобрать её самостоятельно), но нарисуем соответствующую картинку.

Для этого вновь введем переменную v. Уравнение примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x - v \end{cases} \tag{6}$$

Соответствующее векторное поле $(v, -x - v)$ и его фазовые кривые (спирали) изображены на рис. 6.

Видно, что колебания физического маятника затухают: любое решение уравнения стремится к положению равновесия $(0, 0)$. Это легко объяснить, не решая уравнения: полная механическая энергия $\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2}$, которая до введения трения была постоянна на фазовых кривых, теперь убывает с течением времени. Другими словами, все векторы векторного поля направлены внутрь окружностей $x^2 + v^2 = c$.

2. Методы решения дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим три метода приближенного решения и один метод точного решения дифференциальных уравнений. Приближённые методы позволяют находить последовательности функций, сходящиеся к точному решению дифференциального уравнения. Они применимы к большинству

дифференциальных уравнений. Точные методы позволяют находить формулы для решений дифференциальных уравнений. Они бывают применимы очень редко. Более того, для решений большинства дифференциальных уравнений не существует формул (даже содержащих интегралы).

Мы продемонстрируем эти четыре метода решения дифференциальных уравнений на примере уравнения

$$\dot{x} = x. \tag{7}$$

Уравнения вида $\dot{x} = \lambda x$ возникают во многих практических задачах, когда скорость изменения некоторой величины пропорциональна этой величине. Так, скорость роста колонии бактерий пропорциональна количеству бактерий в колонии, поэтому для $\lambda > 0$ уравнение $\dot{x} = \lambda x$ называется *уравнением деления бактерий*. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству, поэтому при $\lambda < 0$ уравнение $\dot{x} = \lambda x$ называют *уравнением радиоактивного распада*.

2.1. Метод разложения в ряд. Будем искать решение уравнения (7) в виде степенного ряда

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

Ряд для производной $\dot{x}(t)$ имеет вид

$$\dot{x}(t) = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в равенстве $\dot{x} = x$, получаем

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_0,\\
&a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0,\\
&\quad\ldots\\
&a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n!}a_0.
\end{aligned}$$

Итак,

$$x(t) = c(1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots).$$

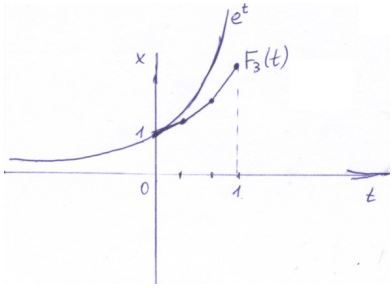

Рис. 7. График решения уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$ и третье приближение Эйлера $F_3(t)$

Как известно из курса математического анализа, такой ряд сходится на всей числовой оси к функции ce^t. Значит, функция ce^t является решением уравнения $\dot{x} = x$. Действительно, мы только что проверили, что ряд Тейлора функции ce^t в нуле совпадает с рядом Тейлора функции $(ce^t)'$ в нуле. Так как эти ряды сходятся к функциям ce^t и $(ce^t)'$, мы получили, что $(ce^t)' = ce^t$ (конечно, это можно проверить и непосредственно).

Метод разложения в ряд позволяет получать *аналитические* решения дифференциальных уравнений как суммы степенных рядов. Напомним, что

Определение 2.1. Бесконечно-гладкая функция f называется **аналитической** в точке x_0, если её ряд Тейлора в точке x_0

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \dots$$

сходится к f в некоторой окрестности точки x_0.

2.2. Метод Эйлера. Метод Эйлера, или *метод последовательных приближений*, позволяет построить последовательность кусочно-линейных функций, сходящихся к точному решению дифференциального уравнения.

Мы будем искать решение уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$.

Построим последовательность кусочно-линейных непрерывных функций $F_n(t)$, определенных на отрезке $[0, T]$, $F_n(0) = 1$, которая сходится к решению нашего уравнения.

Разобьем отрезок на n равных частей. Функция F_n будет линейной на каждой из этих n частей и непрерывной на всем отрезке $[0, T]$. При этом ограничение функции F_n на отрезок $[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$ будет удовлетворять уравнению $\dot{x} = x$ в левом конце этого отрезка, то есть

$$F_n'\left(\frac{kT}{n} + 0\right) = F_n\left(\frac{kT}{n}\right). \tag{8}$$

Оказывается, что это условие позволяет однозначно определить функцию F_n.

Действительно, на первом отрезке $[0; \frac{T}{n}]$ производная функции $F_n(t)$ равна $F_n'(0+0) = F_n(0) = 1$. Тогда на правом конце этого отрезка $F_n(\frac{T}{n}) = 1 + \frac{T}{n}$.

Поэтому на втором отрезке $[\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}]$ производная функции F_n равна $F_n'(\frac{T}{n} + 0) = F_n(\frac{T}{n}) = 1 + \frac{T}{n}$. Значит,

$$F_n\left(\frac{2T}{n}\right) = \left(1 + \frac{T}{n}\right) + \frac{T}{n}\left(1 + \frac{T}{n}\right) = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^2.$$

Таким же образом мы последовательно определим функцию F_n на всех n отрезках. Функция F_n называется *n-м приближением Эйлера* для дифференциального уравнения $\dot{x} = x$.

Общая формула для значений функции F_n в концах отрезков имеет следующий вид:

Лемма 2.2. $F_n\left(\frac{kT}{n}\right) = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^k$

Доказательство. Это утверждение мы докажем индукцией по k.

Базу ($k = 1$) мы уже проверили.

Шаг индукции: По построению функции F_n,

$$F_n\left(\frac{kT}{n}\right) = F_n\left(\frac{(k-1)T}{n}\right) + F_n'\left(\frac{(k-1)T}{n} + 0\right)\frac{T}{n} = \\ = F_n\left(\frac{(k-1)T}{n}\right)\left(1 + \frac{T}{n}\right). \tag{9}$$

Первое равенство следует из линейности функции F_n на отрезке $[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$, а второе — из условия (8). Значит, в силу предположения индукции,

$$F_n\left(\frac{kT}{n}\right) = \left(1+\frac{T}{n}\right)^{k-1}\left(1+\frac{T}{n}\right) = \left(1+\frac{T}{n}\right)^{k}.$$

□

Итак, значение функции F_n в точке T равно $F_n(T) = \left(1+\frac{T}{n}\right)^n$. В курсе математического анализа было доказано, что при $n \to \infty$ эта величина стремится к e^T — значению решения нашего дифференциального уравнения в точке T.

Задача 3. *Докажите, что последовательность функций F_n стремится к функции e^T*

а) поточечно на всем отрезке $[0, T]$.

б) равномерно на отрезке $[0, T]$.

Последовательность приближений Эйлера сходится к точному решению для очень широкого класса дифференциальных уравнений. Отметим, что в тех случаях, когда решение дифференциального уравнения не единственно, метод Эйлера может давать только какое-то одно из решений.

Пример 2.3. *Метод Эйлера дает не все решения уравнения $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$.*

Задача 4. *Проверьте это.*

Примечание 2.4. *Метод Эйлера — самый простой и естественный (но не самый точный) метод численного решения дифференциальных уравнений на компьютере.*

При вычислениях на компьютере невозможно найти саму функцию $x(t)$, так как функций бесконечно много, а память компьютера конечна. Вместо функции $x(t)$ будем искать набор её значений в конечном числе точек — допустим, в точках $\frac{k}{1000}$, $0 \leqslant k \leqslant 1000$. Это то же самое, что искать кусочно-линейную функцию $F_{1000}(t)$, $T = 1$. Мы не можем точно вычислить производную функции, если знаем её значение только в точках вида $\frac{k}{1000}$, но можем вычислить эту производную приближённо:

$$\dot{x}\left(\frac{k}{1000}\right) \approx 1000\left[x\left(\frac{k+1}{1000}\right) - x\left(\frac{k}{1000}\right)\right].$$

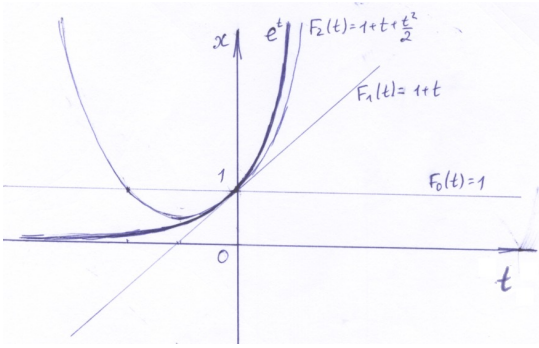

Рис. 8. Три первых приближения Пикара для решения уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$

Поэтому условие $\dot{x} = x$ естественно заменить на условия

$$F_{1000}\left(\frac{k}{1000}\right) = 1000\left[F_{1000}\left(\frac{k+1}{1000}\right) - F_{1000}\left(\frac{k}{1000}\right)\right]$$

для всевозможных k. Из этих условий можно найти функцию F_{1000}.

Если выразить из последнего равенства $F_{1000}(\frac{k+1}{1000})$ через $F_{1000}(\frac{k}{1000})$, мы получим рекуррентную формулу для значений функции в точках $\frac{k}{1000}$. Эту формулу удобно использовать при компьютерных вычислениях.

2.3. Метод Пикара. Метод Пикара, как и метод Эйлера, позволяет построить последовательность функций $F_n(t)$, сходящихся к решению уравнения. Но в методе Пикара эти функции получаются гладкими.

Перейдем от дифференциального уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = x_0$ к равносильному интегральному уравнению. Для этого проинтегрируем обе части уравнения по отрезку $[0, t]$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t x(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Легко проверить, что гладкая функция $x(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (10) (для любого t), удовлетворяет и дифференциальному уравнению, и наоборот.

Положим $F_0(t) \equiv x_0$. Построим последовательность функций следующим образом:

$$F_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t F_k(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Если ряд из функций F_n равномерно сходится, то его предел $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению: ведь в равенстве (11) мы можем перейти к пределу под знаком интеграла и получить равенство (10).

Вычислим функции F_n.

$$\begin{aligned}
&F_1(t) = x_0 + \int_0^t x_0 d\tau = x_0(1+t);\\
&F_2(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1+\tau)d\tau = x_0(1+t+\frac{t^2}{2});\\
&F_3(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1+\tau+\frac{\tau^2}{2})d\tau = x_0(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6});\\
&\qquad \dots
\end{aligned}$$

Упражнение 5. *Докажите по индукции, что*

$$F_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}.$$

Видно, что функции $F_n(t)$ — это частичные суммы ряда для экспоненты

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

умноженные на x_0. Значит, они равномерно сходятся к функции $x_0 e^t$, поэтому эта функция — решение уравнения $\dot{x} = x$.

Задача 6. *Обобщите метод Пикара на случай произвольного уравнения $\dot{x} = f(t, x)$.*

Метод Пикара используется при доказательстве *теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения.* Эту теорему мы докажем в конце семестра.

2.4. Метод разделения переменных. Метод разделения переменных — это точный метод решения дифференциальных уравнений. Он применим к уравнениям вида $\dot{x} = f(x) \cdot g(t)$.

Применение метода разделения переменных к нашему уравнению $\dot{x} = x$ выглядит так: формально умножим обе части равенства на dt и разделим на x:

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \tag{12}$$

(в общем случае нужно делить на $f(x)$).

Проинтегрируем левую и правую части равенства:

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt. \tag{13}$$

Отсюда $\ln|x| = t + C$ и $x = Ce^t$.

С одной стороны, в результате наших действий мы получили правильный ответ: функция Ce^t действительно удовлетворяет уравнению $\dot{x} = x$. С другой стороны, операция домножения на dt и операция «дописывания интегралов» требуют отдельного объяснения. В курсе математического анализа иногда говорят, что символ $\frac{dx}{dt}$ — просто обозначение для производной (и никак не связан с символами dx и dt), и что символ dx под знаком интеграла — просто обозначение, не имеющее отношения к дифференциалу. Если принять такую трактовку, то и в переходе (12), и при переходе к равенству (13) эти символы меняют смысл.

Сейчас мы докажем, что метод разделения переменных применим к нашему уравнению. В дальнейшем мы обоснуем метод разделения переменных в более общем случае (см. раздел 7.2). Позже (в разделе 11.4) мы увидим, что выкладкам (12)–(13) тоже можно придать строгий смысл.

Обоснование метода разделения переменных для уравнения $\dot{x} = x$ Пусть функция $x(t)$ удовлетворяет нашему уравнению, и пусть $x(0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности нуля $\dot{x}(t) = x(t) \neq 0$, поэтому для функции $x(t)$ применима теорема об обратной функции.

Напомним формулировку теоремы об обратной функции.

Теорема 2.5 (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть функция* $f(x)\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема, и* $f'(x) \neq 0$ *на интервале* (a,b)*. Тогда для функции* f *на интервале* (a,b) *существует обратная функция* $g(y)$ *(функция, для которой выполнены равенства* $f(g(y)) = y$ *и* $g(f(x)) = x$*), причем производную функции* g *можно найти из равенства*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{14}$$

Итак, у функции $x(t)$ есть обратная функция. Обозначим её $t(x)$. Производную этой функции можно найти по формуле (14):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{x},$$

ср. с равенством (12). Проинтегрируем левую и правую часть этого уравнения (как функции переменной x):

$$t(x) = C + \int \frac{dx}{x} = C + \ln|x|,$$

ср. с равенством (13). Отсюда, так как функции $x(t)$ и $t(x)$ взаимно обратны, получаем

$$t = C + \ln|x(t)|.$$

Мы получили ту же формулу, что и в методе разделения переменных. Итак, метод разделения переменных применим в окрестности тех точек, где $x(t) \neq 0$. В точках, где $x(t) = 0$, метод разделения переменных неприменим: в переходе (12) нельзя делить на x.

3. Единственность решения дифференциального уравнения $\dot{x} = x$

В предыдущем параграфе мы выяснили, что функции $x = Ce^t$ являются решениями дифференциального уравнения $\dot{x} = x$. Сейчас мы докажем, что других решений у этого уравнения нет.

Предложение 3.1. *Если дифференцируемая функция x, определённая на некотором интервале (A, B) (возможно, бесконечном), удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{x} = x$, то она имеет вид $x(t) = Ce^t$.*

Заметим, что доказательство этого факта для окрестностей точек, в которых $x_0 \neq 0$, содержится в разделе 2.4 в обосновании метода разделения переменных.

Доказательство. Доказательство предложения мы разобьём на две леммы.

Лемма 3.2. *Если на некотором отрезке $t \in (a, b)$ функция $x(t)$ не обращается в 0, то на этом отрезке она имеет вид $x(t) = Ce^t$.*

Это рассуждение уже было проведено в разделе 2.4, но мы повторим его более аккуратно.

Доказательство леммы 3.2. Заметим, что на интервале (a, b) значение функции $\dot{x}(t)$ тоже не обращается в 0 в силу уравнения $\dot{x} = x$.

Из теоремы об обратной функции следует, что для функции $x(t)$ на отрезке (a, b) существует обратная функция $t(x)$, при этом

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Это — дифференциальное уравнение на функцию $t(x)$.

Требуется найти функцию $t(x)$, производная которой равна $1/x$. То есть речь идет о поиске первообразной для функции $1/x$. В курсе математического анализа была доказана следующая теорема:

Теорема 3.3. *Первообразная $F(x)$ непрерывной функции $f(x)$ всегда существует, единственна с точностью до прибавления константы и равна интегралу с переменным верхним пределом:*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(y)dy + C$$

(формула Ньютона-Лейбница).

Итак,

$$t(x) = C + \int_{x_1}^{x} \frac{dy}{y},$$

откуда $t(x) = C + \ln|x|$. Значит, $x(t) = \pm Ce^t$ на отрезке (a, b). Так как функция $x(t)$ непрерывна, то мы вынуждены выбрать одинаковый знак для всех t. Итак, $x(t) = Ce^t$ на отрезке (a, b). $\square$

Примечание 3.4. *Фундаментальная теорема 3.3 — первый и самый простой вариант теоремы* ***существования и единственности решения дифференциального уравнения****, которую мы докажем в конце семестра.*

Лемма 3.5. *Функция $x\colon (A, B) \to \mathbb{R}$, для которой $\dot{x} = x$, или тождественно равна нулю, или нигде не обращается в 0.*

Доказательство. Это утверждение мы докажем от противного. Предположим, что существует ненулевая функция $x(t)$, для которой $\dot{x} = x$ и $x(t_1) = 0$.

Рассмотрим множество $\Omega = \{t \mid x(t) \neq 0\}$. Это множество непусто (иначе $x(t) \equiv 0$), не совпадает со всем интервалом (A, B) (поскольку не содержит точку t_1) и открыто, так как функция $x(t)$ непрерывна. Открытое множество на прямой — это объединение непересекающихся интервалов и лучей. Выберем какой-нибудь интервал $(a, b) \in \Omega$, концы которого не принадлежат Ω (или луч $(a, \pm\infty)$, конец которого не принадлежит Ω). На интервале (a, b) функция $x(t)$ не обращается в 0, поэтому на нём применима лемма 3.2. Значит, функция $x(t)$ на интервале (a, b) имеет вид $x(t) = Ce^t$ для некоторого ненулевого C; поэтому по непрерывности $x(a) = Ce^a \neq 0$, и $a \in \Omega$. Противоречие. $\square$

Из этих двух лемм следует, что решение уравнения $\dot{x} = x$ или тождественно равно нулю (тогда $x(t) = 0 \cdot e^t$), или нигде не обращается в 0 (тогда, по лемме 3.2, $x(t) = Ce^t$). В обоих случаях предложение доказано. $\square$

4. Дифференциальные уравнения и их решения: одномерный случай

4.1. Определения. Пусть Ω — область на плоскости $(t,\, x)$, то есть открытое связное множество. Пусть функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Определение 4.1. **Одномерное дифференциальное уравнение** — это уравнение на неизвестную функцию $x(t)$ вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{15}$$

Решением уравнения (15) с **начальным условием**

$$x(t_0) = x_0 \tag{16}$$

(или **решением задачи Коши** (15), (16)) называется функция $x = \varphi(t)$, определённая на некотором отрезке $t_0 \in (t_1, t_2)$, для которой $\varphi(t_0) = x_0$ и $\frac{d\varphi}{dt} \equiv f(t, \varphi(t))$ во всей области определения.

Решения дифференциального уравнения мы будем считать одинаковыми, если они совпадают там, где они оба определены.

Решить дифференциальное уравнение в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) — значит найти все его решения с начальными условиями из этой окрестности и доказать, что других решений нет.

4.2. Поля направлений и их интегральные кривые. В этом разделе мы обсудим геометрическую переформулировку понятия дифференциального уравнения. Она звучит следующим образом:

Определение 4.2. **Направление** в точке плоскости (t, x) — это прямая на плоскости, проходящая через точку (t, x). Если в каждой точке (t, x) области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ задано направление $l(t, x)$, говорят, что в области Ω задано **поле направлений**.

Поле направлений можно изобразить на схематическом рисунке. Для этого через некоторые из точек (t, x) надо провести отрезки прямых $l(t, x)$ (см., например, рис. 9).

Поле направлений $l(t, x)$ полностью определяется функцией $\alpha(t, x)$, значение которой равно углу наклона направления

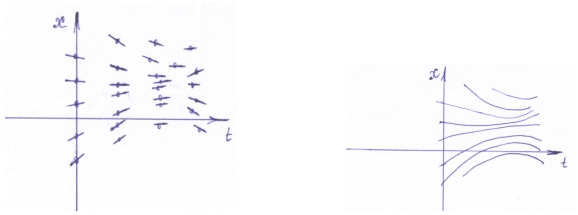

Рис. 9. Поле направлений и его интегральные кривые

$l(t, x)$. Значение функции α определено с точностью до прибавления углов, кратных π.

Сейчас мы увидим, что поля направлений — это (почти) то же самое, что дифференциальные уравнения. Вместо слов «решение дифференциального уравнения» можно говорить слова «*интегральная кривая поля направлений*».

Неформальное определение. **Интегральная кривая** поля направлений — это линия, которая в каждой точке касается направления, заданного в этой точке.

Можно дать более формальное определение, в котором уточняется, насколько гладкой должна быть интегральная кривая:

Определение 4.3. Интегральная кривая поля направлений — это параметризованная кривая

$$x = \varphi(\tau),\ t = \psi(\tau),\ \tau \in (a, b),$$

для которой

- функции φ и ψ дифференцируемы;
- производные этих функций $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и $\frac{d\psi}{d\tau}$ не обращаются в нуль одновременно;
- вектор $(\frac{d\varphi}{d\tau}|_\tau,\ \frac{d\psi}{d\tau}|_\tau)$ — касательный вектор к интегральной кривой в точке $(x(\tau), t(\tau))$ — имеет такое же направление, что и поле направлений в этой точке:

  $$\frac{\frac{d\varphi}{d\tau}|_\tau}{\frac{d\psi}{d\tau}|_\tau} = \operatorname{tg} \alpha(x(\tau), t(\tau)).$$

  Если правая и левая части равенства равны ∞, мы считаем, что равенство выполняется.

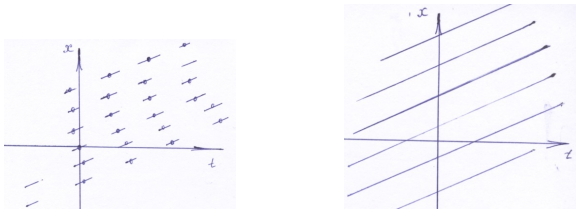

Рис. 10. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = c$

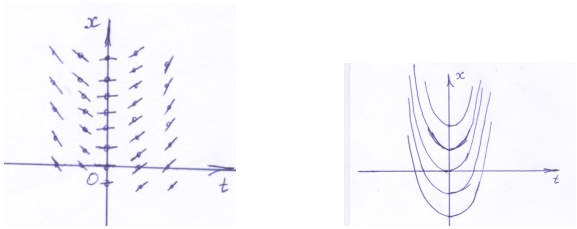

Рис. 11. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = ct$

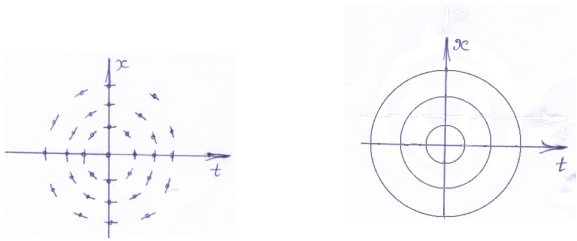

Рис. 12. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = -\frac{t}{x}$

4.3. Связь между дифференциальными уравнениями и полями направлений. Установим соответствие между дифференциальными уравнениями (и их решениями) и полями направлений (и их интегральными кривыми).

Заметим, что дифференциальное уравнение (15) задает поле направлений в области Ω, угол наклона которого в точке (t, x) равен $\alpha(t, x)$:

$$\operatorname{tg} \alpha(t, x) = f(t, x). \tag{17}$$

Предложение 4.4. *Интегральные кривые поля направлений* (17) *— это в точности графики решений дифференциального уравнения* (15).

Доказательство. Заметим, что если пользоваться неформальным определением интегральной кривой, доказательство получится совсем простым. Действительно, *тангенс угла наклона касательной к графику функции равен производной функции в этой точке.* Поэтому если график функции $x(t)$ касается поля направлений (17), то производная $\dot{x}(t)$ равна $\operatorname{tg} \alpha(t, x) = f(t, x(t))$. Обратное тоже верно.

Теперь дадим формальное доказательство.

Пусть $x(t)$ — решение дифференциального уравнения (15). Положим $\varphi(\tau) := \tau$ и $\psi(\tau) := x(\tau)$. Тогда параметрическая кривая $t = \varphi(\tau), x = \psi(\tau)$ совпадает с графиком функции $x(t)$. Проверим требования определения 4.3.

- функция $\varphi(\tau) = \tau$, очевидно, дифференцируема. Функция $\psi(\tau) = x(\tau)$ дифференцируема в силу дифференциального уравнения.

- производные этих функций $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и $\frac{d\psi}{d\tau}$ не обращаются одновременно в нуль, так как $\frac{d\varphi}{d\tau} = 1$.

- касательный вектор к нашей кривой в точке $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ имеет такое же направление, что и поле направлений (17) в этой точке:

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\tau}|_\tau}{\frac{d\psi}{d\tau}|_\tau} = \frac{\dot{x}(t)}{1} = f(t, x(t)) = \operatorname{tg} \alpha(t(\tau), x(\tau)).$$

Наоборот, пусть $t = \varphi(\tau), x = \psi(\tau)$ — интегральная кривая поля направлений (17). Мы хотим доказать, что она является графиком решения дифференциального уравнения (15). Для этого надо представить эту кривую в виде графика некоторой функции $x(t)$, то есть найти зависимость x от t для точек этой кривой. Достаточно найти зависимость τ от t, так как зависимость x от τ мы знаем.

По определению интегральной кривой,

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\tau}|_\tau}{\frac{d\psi}{d\tau}|_\tau} = f(t(\tau), x(\tau)).$$

Значит, производная $\frac{d\psi}{d\tau}|_\tau$ нигде не обращается в нуль, поэтому определено отображение $\tau(t)$, обратное к $\psi(\tau)$. Мы нашли зависимость τ от t для точек интегральной кривой.

Обозначим $x(t) := \varphi(\tau(t))$. Тогда график отображения $x(t)$ совпадает с кривой $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$.

Проверим, что отображение $x(t)$ является решением дифференциального уравнения. По формуле производной обратной функции,

$$\left.\frac{d\tau(t)}{dt}\right|_t = \frac{1}{\left.\frac{d\psi}{d\tau}\right|_{\tau(t)}},$$

и по формуле производной сложной функции, применённой к функции $x(t) = \varphi(\tau(t))$,

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_t = \left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau(t)} \frac{1}{\left.\frac{d\psi}{d\tau}\right|_{\tau(t)}}.$$

Отсюда

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_t = \frac{\left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{\tau(t)}}{\left.\frac{d\psi}{d\tau}\right|_{\tau(t)}} = f(x(\tau(t)), t(\tau(t))) = f(x(t), t).$$

□

Итак, каждому дифференциальному уравнению мы сопоставили поле направлений с помощью формулы (17). Полю направлений можно сопоставить дифференциальное уравнение, пользуясь этой же формулой, *если только это поле направлений не вертикально ни в одной точке области*; в противном случае функцию f придется сделать бесконечной в некоторых точках. Давайте обобщим понятие дифференциального уравнения таким образом, чтобы любое поле направлений (даже вертикальное в некоторых точках) соответствовало какому-то дифференциальному уравнению. Грубо говоря, мы введем в рассмотрение дифференциальные уравнения, правая часть которых в некоторых точках равна ∞.

Определение 4.5. Говоря о дифференциальном уравнении, мы, кроме уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{18}$$

будем также рассматривать обратное к нему уравнение

$$\frac{dt}{dx} = f_1(t, x), \tag{19}$$

где

- в каждой точке области Ω определена либо функция f, либо функция f_1;
- если в точке $(t, x) \in \Omega$ определены обе функции, то $f(t, x) = \frac{1}{f_1(t,x)}$;
- функции f и f_1 непрерывны по совокупности переменных.

Дифференциальному уравнению в смысле определения 4.5 соответствует поле направлений, заданное следующим образом:

$$\operatorname{tg} \alpha(t, x) := f(t, x), \tag{20}$$

если функция f определена в точке (t, x), и

$$\operatorname{ctg} \alpha(t, x) := f_1(t, x), \tag{21}$$

если функция f_1 определена в точке (t, x). Легко проверить, что формулы (20) и (21) не противоречат друг другу в тех точках, где определены обе функции f и f_1.

Пример 4.6. *Уравнение $\dot{x} = -t/x$ (см. рис. 12) не определено на прямой $x = 0$. Но если его рассматривать в смысле определения 4.5, оно будет определено во всей плоскости, кроме точки $(0, 0)$. На прямой $x = 0$ соответствующее поле направлений вертикально.*

Решение дифференциального уравнения в смысле определения 4.5 — это набор функций $x_i(t), t_i(x)$, причём

- Функции $x_i(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = f(t, x)$ на своей области определения, а функции $t_i(x)$ — уравнению $\frac{dt}{dx} = f_1(t, x)$ на своей области определения.
- Графики функций $x_i(t)$ и $t_i(x)$ на плоскости Oxt составляют одну кривую.

Объединение графиков функций $x_i(t)$ и $t_i(x)$ на плоскости Oxt — это интегральная кривая соответствующего поля направлений. Действительно, в окрестности тех точек, где функция f определена, это следует из предложения 4.4. В окрестности тех точек, где функция f_1 определена, это следует из предложения 4.4, примененного к обратному дифференциальному уравнению $\frac{dt}{dx} = f_1(t, x)$.

5. Автономные дифференциальные уравнения на прямой

В этом параграфе мы научимся решать автономные дифференциальные уравнения на прямой (уравнения, правая часть которых не зависит от времени), и изучим вопрос о единственности их решений.

Напомним, что для уравнения $\dot{x} = x$ мы уже нашли все решения (см. параграф 2) и доказали, что других решений нет (см. параграф 3). В параграфе 3 мы, вместо того, чтобы искать функцию $x(t)$, искали обратную функцию $t(x)$. Этот приём работает и в общем случае. Если есть автономное уравнение на функцию $x(t)$, то у уравнения на обратную функцию $t(x)$ правая часть зависит только от x. Следующий раздел посвящен именно таким дифференциальным уравнениям и носит вспомогательный характер.

5.1. Дифференциальные уравнения, правая часть которых зависит только от времени. В этом разделе мы рассмотрим очень простой тип дифференциальных уравнений (уравнения этого типа решают в курсе математического анализа). Результаты этого раздела мы будем использовать в разделе 5.2.

Рассмотрим дифференциальные уравнения следующего вида:

$$\dot{x} = f(t) \tag{22}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Сразу можно заметить, что поле направлений этого уравнения инвариантно относительно сдвига $x \mapsto x + C$. Значит, интегральная кривая при таком сдвиге переходит в интегральную кривую. Другими словами, если $x = h(t)$ — решение уравнения (22), то $x = h(t) + C$ — тоже его решение. Эта *симметрия* является скрытой причиной того, что решение уравнения (22) можно найти так просто (о симметриях дифференциальных уравнений можно прочитать в параграфе 10).

Решение уравнения (22) — это первообразная функции $f(t)$. Первообразную, как известно из курса математического анализа (теорема 3.3), можно найти по формуле Ньютона—Лейбница. Таким образом, верны следующие два предложения:

Предложение 5.1 (Существование решений уравнения (22))**.** *Решение уравнения* (22) *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *существует: функция*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \tag{23}$$

удовлетворяет уравнению (22).

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом. □

Предложение 5.2 (Единственность решений уравнения (22))**.** *Решение уравнения* (22) *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *единственно.*

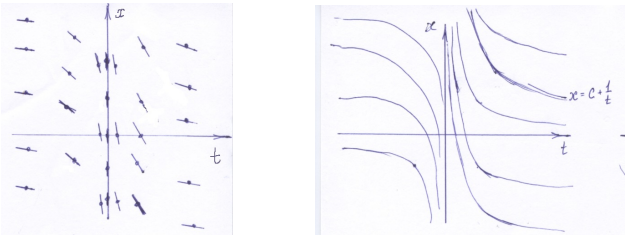

Рис. 13. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = -\frac{1}{t^2}$

Доказательство. Если у этого уравнения есть два разных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то производная их разности равна нулю. Если производная гладкой функции равна нулю, то эта функция постоянна (чтобы доказать это, достаточно применить теорему Лагранжа о конечных приращениях). Значит, $x_1(t) - x_2(t) = const$. Но оба решения удовлетворяют начальным условиям, поэтому $x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$. Отсюда $x_1(t) \equiv x_2(t)$. □

Пусть теперь функция f непрерывна на отрезках (a, c) и (c, b) и имеет пределы $\lim\limits_{t \to c \pm 0} f(t) = \pm\infty$. Дифференциальное уравнение (22) с такой функцией f понадобится нам в следующем разделе.

Дифференциальное уравнение (22) в таком случае надо понимать в смысле определения 4.5. Соответствующее поле направлений вертикально на прямой $t = c$; поэтому вертикальная прямая $t = c$ есть интегральная кривая.

Приведём несколько примеров таких уравнений.

Пример 5.3. *Уравнение* $\dot{x} = -\frac{1}{t^2}$ *в полосе* $\{(t, x) \mid t \in (-1, 1), x \in \mathbb{R}\}$. *Решения имеют вид* $x = C + \frac{1}{t}$ *и уходят на бесконечность вблизи точки* 0 *(см. рис. 13). Через каждую точку* (t, x) *проходит одна, и только одна, интегральная кривая. Поэтому решение этого дифференциального уравнения с любым начальным условием существует и единственно.*

Пример 5.4. *Уравнение* $\dot{x} = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$ *в полосе* $\{(t, x) \mid t \in (-1, 1), x \in \mathbb{R}\}$. *Вне нуля его решение имеет вид* $x(t) = C + 3t^{\frac{1}{3}}$ *(см. рис. 14). При этом интегральная кривая этого уравнения может состоять из трёх участков:*

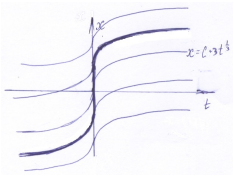

Рис. 14. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$. Одна из интегральных кривых выделена жирным

- $x(t) = C_1 + 3t^{\frac{1}{3}}$ *на отрезке* $t \in [-1, 0]$,
- $x(t) = C_2 + 3t^{\frac{1}{3}}$ *на отрезке* $t \in [0, 1]$,
- $t = 0, x \in [C_1, C_2]$ *(этот участок вертикален и может иметь произвольную длину)*

(такая интегральная кривая изображена на рис. 14), или из двух участков: вертикального луча и кривой $x(t) = C + 3t^{\frac{1}{3}}$, *или совпадать с прямой* $t = 0$.

Ясно, что решение этого дифференциального уравнения для любого начального условия не единственно.

Пример 5.5. *Уравнение* $\dot{x} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ *в полосе* $\{(t, x) \mid t \in (-1, 1), x \in \mathbb{R}\}$. *Вне нуля решение имеет вид* $x = C + \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$ *(см. рис. 15). Каждая интегральная кривая, кроме прямой* $t = 0$, *состоит из двух участков:*

- $x = C + \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$, $t < 0$,
- $t = 0, x \in [C, -\infty]$,

или же

- $x = C + \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$, $t > 0$,
- $t = 0, x \in [C, -\infty]$.

Решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ *единственно, если только* t_0 *не равно нулю. Если* $t_0 = 0$, *решение не единственно.*

Для уравнений вида (22) можно сформулировать простой критерий единственности решения дифференциального уравнения:

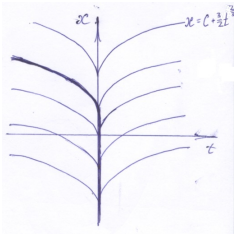

Рис. 15. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$. Одна выделена жирным

Предложение 5.6. *Пусть функция f непрерывна на отрезках (a, c) и (c, b) и имеет пределы $\lim\limits_{t\to c\pm 0} f(t) = \pm\infty$.*

Тогда через каждую точку полосы $[a, b] \times \mathbb{R}$ в том и только том случае проходит единственная интегральная кривая уравнения (22), когда расходятся[1] *оба интеграла:*

$$\int_{c-\varepsilon}^{c} f(\tau)d\tau, \quad \int_{c}^{c+\varepsilon} f(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Пусть какой-то из этих интегралов (например, первый) сходится. Пусть $\lim\limits_{t\to c-0} f(t) = +\infty$, и на полуинтервале $[c-\varepsilon, c)$ функция f положительна. Тогда функцию

$$x(t) = x_0 + \int_{c-\varepsilon}^{t} f(\tau)d\tau, \tag{24}$$

определённую на полуинтервале $[c-\varepsilon, c)$, можно доопределить по непрерывности в точку c. Её график имеет вертикальную касательную в точке c, так как тангенс угла наклона касательной в точке c равен

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{x(c) - x(c-\delta)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int_{c-\delta}^{c} f(\tau)d\tau}{\delta} \geqslant \lim_{\delta\to 0} \min_{[c-\delta,c]} f(\tau) = +\infty$$

Последнее равенство следует из того, что $\lim\limits_{t\to c-0} f(t) = +\infty$.

[1] Напоминание необходимых определений из математического анализа можно найти в дополнении (параграф 14), определение 14.18.

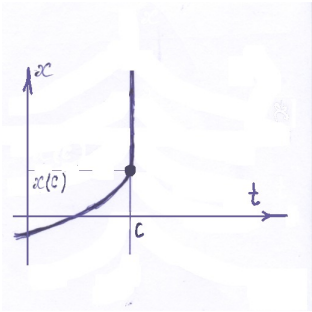

Рис. 16. Случай сходящегося интеграла

Поэтому кривая, состоящая из графика функции $x(t)$ и вертикального луча $t = c, x \geqslant x(c)$ — это интегральная кривая (см. рис. 16). В качестве параметра на этой кривой можно выбрать $\tau = t$, так как по формуле (24) функция $x(t)$ монотонно возрастает.

С другой стороны, прямая $t = c$ тоже является интегральной кривой нашего уравнения. Итак, через одну и ту же точку $(c, x(c))$ проходят две разные интегральные кривые.

Наоборот, пусть оба интеграла расходятся. Докажем, что никакая интегральная кривая не может пересекать прямую $t = c$. Возьмём любую интегральную кривую, не совпадающую с прямой $t = c$; пусть она проходит через точку (t_0, x_0), $t_0 \neq c$ (скажем, $t_0 < c$). Тогда участок этой интегральной кривой, который содержится в полосе $a \leqslant t < c$, является графиком функции

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \text{ для } a \leqslant t < c. \tag{25}$$

Действительно, на любом подотрезке $[a, t] \subset [a, c)$ функция f ограничена, а для ограниченной функции f, как мы уже выяснили, все решения задаются формулой (25).

Значит, $\lim\limits_{t \to c-0} x(t) = \lim\limits_{t \to c-0} f(t) = \pm\infty$ (см. рис. 17). Поэтому наша интегральная кривая не может пересекать прямую $t = c$.

Мы доказали, что никакая интегральная кривая не может пересекать прямую $t = c$. Но вне прямой $t = c$ все интегральные кривые являются графиками функций (25) для разных значений x_0, а такие кривые попарно не пересекаются.

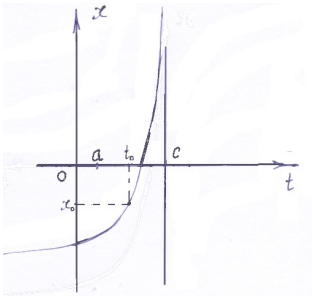

Рис. 17. Случай расходящихся интегралов

□

5.2. Определение автономного дифференциального уравнения на прямой. Пусть материальная точка движется по прямой, и её скорость зависит только от положения точки:

$$\dot{x} = f(x); \tag{26}$$

$$x_0 = x(t_0). \tag{27}$$

Как обычно, мы считаем, что функция f непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$.

Дифференциальное уравнение (26) относится к важному классу *автономных* дифференциальных уравнений.

Определение 5.7. **Автономным** называется дифференциальное уравнение, правая часть которого не зависит от времени.

Поле направлений для автономного уравнения инвариантно относительно сдвига по времени $t \mapsto t + C$. Это же свойство выполнено и для интегральных кривых. Значит, если функция $x(t)$ удовлетворяет автономному дифференциальному уравнению, то функция $x(t + C)$ тоже ему удовлетворяет.

Мы уже сталкивались с похожей ситуацией в разделе 5.1: там поле направлений уравнения не менялось при сдвиге $x \mapsto x + C$. Давайте решим уравнение (26), «поменяв местами» x и t и тем самым сведя задачу к предыдущей. Напомним, что аналогичное рассуждение мы уже проводили для уравнения $\dot{x} = x$ в параграфе 3.

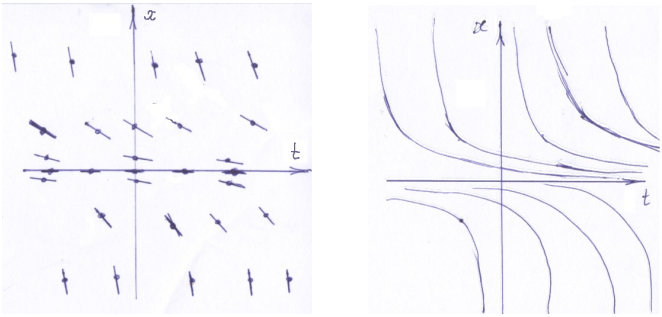

Рис. 18. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $\dot{x} = -x^2$

В следующем упражнении нужно догадаться, как правильно менять местами x и t. Решение упражнения содержится в пункте 5.3.

Упражнение 7. *На рисунках 18-20 изображены интегральные кривые некоторых автономных уравнений. Эти рисунки получены из рисунков 13-15 отражением относительно прямой $x = t$. Как нужно изменить дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t)$, чтобы его интегральные кривые отразились относительно прямой $x = t$?*

Указание Как связаны пары дифференциальных уравнений, которые встречаются в подписях к рисункам 13-15 и 18-20:

- $\dot{x} = -\frac{1}{t^2}$ и $\dot{x} = -x^2$;
- $\dot{x} = t^{-\frac{2}{3}}$ и $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$;
- $\dot{x} = t^{-\frac{1}{3}}$ и $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$?

5.3. Решение автономного дифференциального уравнения на прямой.

Случай 1: $f(x_0) \neq 0$. Мы докажем следующее предложение:

Предложение 5.8. *Пусть функция f определена на некотором интервале и непрерывна. Решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $f(x_0) \neq 0$, существует и единственно в некоторой окрестности точки t_0; оно задаётся*

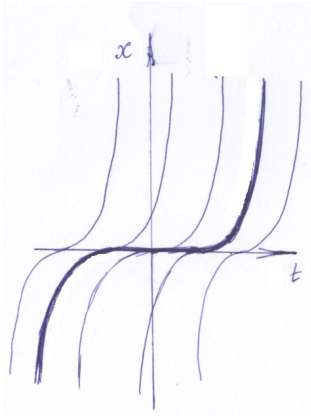

Рис. 19. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$

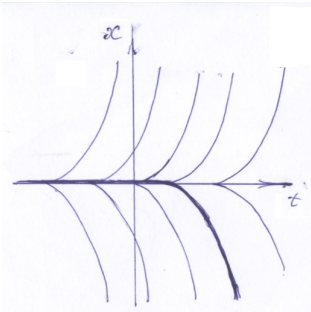

Рис. 20. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$

формулой

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} \tag{28}$$

Доказательство. Если $x(t)$ — решение нашего дифференциального уравнения, $x(t_0) = x_0$, то из соображений непрерывности $f(x(t)) \neq 0$ в некоторой окрестности точки t_0. По теореме об обратной функции, примененной к функции $x(t)$, мы получаем дифференциальное уравнение на обратную функцию $t = t(x)$ в некоторой окрестности точки x_0:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}.$$

Примечание 5.9. *Решить такое уравнение — значит найти первообразную функции $1/f(x)$, а такая задача рассматривалась в курсе математического анализа и в разделе 5.1 (см. предложения 5.1 и 5.2).*

Интегрируя обе части уравнения по переменной x, получаем

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}. \tag{29}$$

Такая функция $t(x)$ монотонна в некоторой окрестности нуля, так как функция $f(x)$ знакопостоянна в некоторой окрестности нуля. Значит, существует и единственна обратная функция $x(t)$. Итак, в этом случае решение уравнения с заданным начальным условием существует и единственно в некоторой окрестности точки t_0. □

Случай 2: $f(x_0) = 0$.

В этом случае решением уравнения будет функция $x(t) \equiv x_0$ (этому решению соответствует горизонтальная интегральная кривая).

Остается только исследовать вопрос о единственности решения в этом случае. Мы докажем следующее утверждение:

Предложение 5.10. *Пусть $f(x_0) = 0$, и $f(x) \neq 0$ на множестве $(x_0 - \varepsilon, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Пусть, кроме того, оба интеграла*

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dy}{f(y)}, \quad \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \tag{30}$$

расходятся.

Тогда функция $x(t) \equiv x_0$ *есть единственное решение задачи Коши* (26), (27).

Заметим, что когда мы «меняем местами» x и t, это предложение превращается в следствие из предложения 5.6.

Упражнение 8. *Докажите, что условие расходимости интегралов является необходимым.*

Указание: см. предложение 5.6.

Доказательство. Предположим, что задача Коши (26), (27) имеет другое решение $x(t)$. Найдём интервал (t_1, t_2), внутри которого выполнено $x(t) \neq x_0$, а на одном из концов этого интервала (например, на левом) $x(t_1) = x_0$. Такой интервал всегда можно найти: множество точек, где $x(t) \neq x_0$, открыто, непусто и не совпадает со всей прямой, поэтому представляется в виде объединения непересекающихся интервалов и лучей. В качестве интервала (t_1, t_2) можно взять один из этих интервалов или кусок луча (ср. с рассуждением из параграфа 3).

Применяя те же соображения, что и при получении формулы (29), мы можем написать

$$t - (t_1 + \delta) = \int_{x(t_1+\delta)}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} \tag{31}$$

для достаточно маленького $\delta > 0$ и любого $t \in (t_1, t_2)$, достаточно близкого к t_1. Действительно, когда δ достаточно мало, а t достаточно близко к t_1, значения $x(t)$ и $x(t_1 + \delta)$ достаточно близки к $x(t_1) = x_0$, поэтому функция $f(x)$ знакопостоянна на интервале $[x(t_1 + \delta), x(t)]$.

Левая часть равенства (31) имеет конечный предел $t - t_1$ при $\delta \to 0$. Значит, и правая часть имеет предел. Поэтому интеграл $\int_{x(t_1)}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)}$ сходится. При этом $x(t_1) = x_0$ и $x(t) \neq x_0$ в силу выбора интервала (t_1, t_2). Это противоречит расходимости интегралов (30). □

Итак, мы рассмотрели оба случая и доказали следующую теорему:

Теорема 5.11. *Пусть у функции $f(x)$ на интервале (a, b) есть конечное число нулей. Пусть для любого её нуля a_k, $f(a_k) = 0$, оба интеграла*

$$\int_{a_k-\varepsilon}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}, \int_{a_k}^{a_k+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \tag{32}$$

расходятся.

Тогда задача Коши (26), (27) *имеет единственное локальное решение для любого $x_0 \in (a, b)$.*

Примечание 5.12. *Напомним, что единственность локального решения означает, что любые два решения, определённые в некоторых окрестностях точки t_0, совпадают там, где они оба определены.*

5.4. Достаточное условие единственности решения автономного дифференциального уравнения на прямой. В предыдущем разделе мы научились решать автономные дифференциальные уравнения на прямой с непрерывной правой частью. Выяснилось, что решение дифференциального уравнения существует при любом начальном условии, но не всегда единственно.

В этом разделе мы укажем простое достаточное условие единственности решения дифференциального уравнения. Обобщением предложения 5.16, которое мы докажем в конце этого раздела, является теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Эту теорему в её общем виде мы докажем в конце семестра.

Достаточным оказывается следующее свойство правой части дифференциального уравнения.

Определение 5.13. Функция $f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R}$ называется **липшицевой**, если существует такая константа k, что для любых точек $x_1, x_2 \in (a,\, b)$ выполнено неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k\,|x_1 - x_2|\,.$$

Константа k называется константой Липшица функции f.

Понятно (докажите это!), что липшицева функция всегда непрерывна. Обратное утверждение неверно:

Упражнение 9. *Приведите пример непрерывной, но не липшицевой функции; гладкой, но не липшицевой функции.*

Но гладкая функция *с ограниченной производной* обязательно является липшицевой.

Предложение 5.14. *Функция* $f\colon (a,\, b) \to \mathbb{R}$ *из класса* C^1*, имеющая ограниченную производную:*

$$|f'(x)| \leqslant k \text{ при всех } x \in (a,\, b),$$

липшицева с константой k*.*

Доказательство. Мы дадим два доказательства этого простого факта.

Первое доказательство

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(y)dy.$$

Оценим интеграл в правой части равенства:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f'(y)|dy \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

Второе доказательство

По теореме Лагранжа о конечных приращениях,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\xi},$$

где $\xi \in (x_1,\, x_2)$. Отсюда сразу следует требуемое утверждение. □

Оказывается, что из липшицевости функции f следует расходимость интегралов (30), а значит, единственность решения дифференциального уравнения (26).

Предложение 5.15. *Пусть* f *— липшицева функция, заданная на отрезке* $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$*. Пусть* $f(x_0) = 0$*, и функция* $f(x)$ *не обращается в* 0 *в проколотой* ε*-окрестности точки* x_0*. Тогда оба интеграла*

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dy}{f(y)},\ \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}$$

расходятся.

Доказательство. Оценим значение функции f в точке $y \in (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$. Допустим, $y > x_0$. В силу липшицевости,

$$|f(y) - f(x_0)| \leqslant k|y - x_0|,$$

откуда

$$|f(y)| \leqslant k|y - x_0|.$$

Функция f знакопостоянна на интервале $(x_0,\, x_0+\varepsilon)$. Не ограничивая общности, будем считать, что она положительна. Тогда

$$\frac{1}{f(y)} \geqslant \frac{1}{k(y - x_0)},$$

а интеграл от функции $\frac{1}{k(y-x_0)}$ по отрезку $[x_0, x_0+\varepsilon]$ расходится. Значит, расходится и интеграл

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}.$$

Аналогичным образом можно доказать, что расходится интеграл

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dy}{f(y).}$$

□

Объединяя эти результаты, можно получить следующее достаточное условие существования и единственности решения уравнения (26).

Предложение 5.16. *Пусть функция f липшицева на множестве $(a,\, b) \ni x_0$. Тогда задача Коши* (26), (27) *имеет единственное локальное решение.*

Это предложение «почти» следует из теоремы 5.11 и предложения 5.15. Но мы, не ссылаясь на теорему 5.11, повторим доказательство еще раз.

Доказательство. **Случай 1.** $f(x_0) \neq 0$**.**

По теореме об обратной функции мы можем перейти к равносильному уравнению $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}$. Оно имеет следующее (единственное) решение с начальным условием (27):

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}.$$

Заданная таким образом функция $t(x)$ монотонна в некоторой окрестности точки x_0 (так как функция $f(x)$ знакопостоянна в некоторой окрестности точки x_0). Значит, существует и единственна обратная функция $x(t)$. Итак, в этом случае решение уравнения с заданным начальным условием существует и единственно в некоторой окрестности нуля.

Случай 2. $f(x_0) = 0$**.** Понятно, что уравнению удовлетворяет функция, тождественно равная x_0.

Предположим, что существует другое решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$. Мы не можем напрямую применить теорему 5.11, так как функция $f(x(t))$ может обращаться в 0 в бесконечном количестве точек вблизи точки t_0. Поступим следующим образом.

Существует такой момент времени t_1, что $f(x(t_1)) \neq 0$. Иначе $f(x(t)) \equiv 0$, и в силу уравнения $\dot{x} = f(x(t)) \equiv 0$, а тогда $x(t)$ постоянно. Раз $x(t_0) = x_0$, то $x(t) \equiv x_0$. Противоречие.

Итак, $f(x(t_1)) \neq 0$. В частности, $x(t_1) \neq x_0$.

Найдем наибольшее значение $t \in [t_0, t_1]$, для которого $f(x(t)) = 0$. Обозначим его t_0'.

В правой окрестности точки t_0' применим те же соображения, что и при доказательстве предложения 5.10. А именно, на отрезке $[t_0' + \delta, t_1]$ функция $f(x(t))$ не обращается в 0. Поэтому

$$t_1 - ({t_0}' + \delta) = \int_{x(t_0'+\delta)}^{x(t_1)} \frac{dy}{f(y)}.$$

При $\delta \to 0$, в силу предложения 5.15, правая часть стремится к бесконечности. Так как левая часть не стремится к бесконечности, мы получаем противоречие.

Итак, решение $x(t) \equiv x_0$ единственно. □

6. Многомерные дифференциальные уравнения

В этом параграфе мы дадим определение многомерного дифференциального уравнения и некоторых понятий, связанных с ним. Мы уже сталкивались с двумерными дифференциальными уравнениями в разделе 1.3 (см. уравнения (5) и (6)).

6.1. Определения. Мы уже знаем, что одномерное дифференциальное уравнение — это поле направлений на плоскости Otx, а график решения дифференциального уравнения — интегральная кривая этого поля направлений. Поэтому естественно определить многомерное дифференциальное уравнение как поле направлений в многомерном пространстве $(t, x_1, \dots x_n)$. Определение дословно переносится из одномерного случая.

Определение 6.1. Направление в точке $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — это прямая в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через точку $(t, \vec{x})$.

Если в каждой точке $(t, \vec{x})$ области $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ задано направление $l(t, \vec{x})$, говорят, что в области Ω задано **поле направлений**.

Интегральная кривая поля направлений — это кривая

$$\vec{\phi}(\tau) = (\phi_0(\tau), \phi_1(\tau) \dots \phi_n(\tau)),$$

такая, что все функции ϕ_j дифференцируемы, их производные не обращаются в 0 одновременно, и касательный вектор к этой кривой $(\dot{\phi}_0, \dots, \dot{\phi}_n)$ содержится в прямой поля направлений $l(\phi(t))$.

Можно считать, что дифференциальное уравнение — это и есть поле направлений в некоторой области пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Решение дифференциального уравнения можно определить как вектор-функцию $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, график которой $(t, x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t))$ является интегральной кривой поля направлений.

Дадим, кроме этого геометрического определения, еще и аналитическое.

Определение 6.2. Многомерное дифференциальное уравнение — это уравнение вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{где } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{33}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор с координатами $x_1(t) \dots x_n(t)$. В качестве начальных условий для многомерного дифференциального уравнения мы берём условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \Omega \tag{34}$$

Решением уравнения (33) с начальным условием (34) (решением задачи Коши (33), (34)) будем называть вектор-функцию $x(t)$,

определённую на некотором интервале $t_0 \in (t_1, t_2)$ и удовлетворяющую условиям (33), (34).

Уравнение (33) можно расписать и покоординатно:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Многомерное дифференциальное уравнение, записанное в таком виде, еще называют *системой* n дифференциальных уравнений.

Упражнение 10. *Продумайте понятие многомерного дифференциального уравнения. Выясните, какое поле направлений оно задает. Докажите, что интегральная кривая такого поля направлений — это в точности график решения многомерного дифференциального уравнения.*

В этом упражнении нужно дословно повторить рассуждение, которое уже проведено для случая $n = 1$. Мы не будем этого делать.

Задача 11. *В одномерном случае поля направлений, вертикальные в некоторых точках, не соответствуют никаким дифференциальным уравнениям в смысле обычного определения. В определении 4.5 мы расширили понятие дифференциального уравнения, чтобы устранить этот недостаток. Дайте аналогичное определение в многомерном случае.*

6.2. Уравнения высших порядков. Казалось бы, уравнения Ньютона (см. раздел 1.2) не являются дифференциальными уравнениями в смысле наших определений, так как в них присутствует вторая производная от неизвестной функции. Но, как мы делали в разделе 1.3, уравнение $\ddot{x} = f(x)$ можно переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x)$. Такую же операцию можно проделать с любым уравнением, содержащим старшие производные.

Определение 6.3. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x^{(2)}(t), \dots x^{(n-1)}(t)), \tag{35}$$

где функция $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Решением такого дифференциального уравнения с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \tag{36}$$

называется n раз дифференцируемая функция $x(t)$, определённая на некотором отрезке $t_0 \in (t_1, t_2)$ и удовлетворяющая условиям (35), (36).

На первый взгляд, уравнения порядка $n > 1$ гораздо сложнее, чем уравнения порядка 1, которые мы рассматривали раньше. Это не так: на самом деле, уравнение порядка n можно свести к *n-мерному* дифференциальному уравнению порядка 1.

Действительно, пусть $x(t)$ — решение уравнения (35). Рассмотрим функции $x_0(t) = x(t), x_1(t) = x'(t), \ldots, x_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$. Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = f(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) \end{cases} \tag{37}$$

с начальным условием

$$x_0(t_0) = x_0,\ \ldots,\ x_{n-1}(t_0) = x_{n-1}. \tag{38}$$

И наоборот, если функции $x_0(t) \ldots x_{n-1}(t)$ удовлетворяют системе уравнений (37) с начальными условиями (38), то функция $x(t) = x_0(t)$ удовлетворяет уравнению (35) с начальными условиями (36). Итак, мы перешли от уравнения порядка n к уравнению в n-мерном пространстве. Теперь понятно, почему начальные условия для уравнений высших порядков — это условия на все производные, а не только на значение $x(t_0)$.

Кроме уравнений высших порядков, можно рассматривать системы высших порядков: в уравнении (35) переменную x можно считать многомерной. Системы уравнений высших порядков тоже можно свести к системам уравнений первого порядка описанным образом.

Упражнение 12. *От системы уравнений*

$$\begin{cases} x^{(3)} = y^{(2)} - x \\ y^{(3)} = x^{(2)} y + x y^{(2)} \end{cases} \tag{39}$$

перейдите к системе уравнений первого порядка.

В разделе 1.3 мы объяснили, как можно изображать уравнения Ньютона на плоскости (x, v) с помощью векторных полей. В следующем разделе мы найдем связь между дифференциальными уравнениями и векторными полями в более общем случае.

6.3. Фазовый портрет автономного уравнения.

Напомним, что в разделе 4.2 мы нашли связь между решениями дифференциальных уравнений и интегральными кривыми полей направлений. В этом разделе появится еще одна удобная геометрическая конструкция, связанная с *автономным* дифференциальным уравнением — фазовый портрет. Для уравнений Ньютона мы уже рисовали фазовые портреты в разделе 1.3.

Так же, как и в одномерном случае, *автономным* называется уравнение, правая часть которого не зависит от времени. Автономное уравнение имеет вид

$$\dot{x} = v(x), \quad \text{где } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Вектор-функцию v мы будем считать непрерывной в области Ω. Итак, автономное дифференциальное уравнение в каждой точке фазового пространства задаёт вектор $v(x)$ — скорость движения в этой точке.

Определение 6.4. Векторное поле в области Ω — это отображение $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, которое в каждой точке $x \in \Omega$ задаёт n-мерный вектор $v(x)$.

Из этого определения видно, что автономное дифференциальное уравнение — это *то же самое*, что некоторое векторное поле. Оказывается, что решения дифференциального уравнения соответствуют *фазовым кривым* векторного поля.

Определение 6.5. Область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ называется **фазовым пространством** автономного дифференциального уравнения. **Фазовая кривая** автономного дифференциального уравнения — это параметризованная кривая $\gamma(t)$ в области Ω, которая в каждой точке касается вектора, приложенного в этой точке:

$$\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t)). \tag{40}$$

Фазовый портрет дифференциального уравнения — это разбиение области Ω на фазовые кривые.

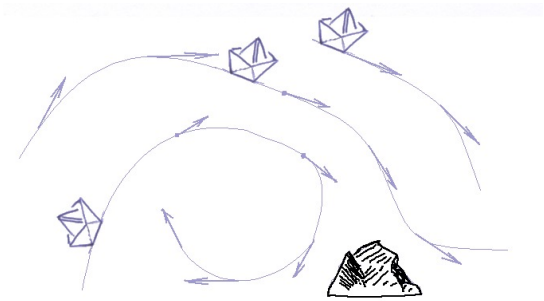

Рис. 21. Фазовый портрет векторного поля скоростей течений

Примечание 6.6. *Говоря о фазовой кривой векторного поля, мы часто будем иметь в виду кривую без фиксированной параметризации (или с «неправильной» параметризацией). Например, фраза «фазовая кривая векторного поля $\dot{x} = v, \dot{v} = -x$ — это окружность с центром в нуле» (см. раздел 1.3) не содержит никакой информации о параметризации параметром t, то есть о том, с какой скоростью проходится эта окружность.*

Из формулы (40) видно, что функция $x(t)$ тогда и только тогда является решением уравнения $\dot{x} = v(x)$, когда параметризованная кривая $x(t)$ является фазовой кривой векторного поля $v(x)$. То есть как только мы знаем фазовую кривую уравнения вместе с параметризацией временем t, мы знаем и решение дифференциального уравнения.

Напомним, что если векторное поле — это поле скоростей течения воды в ручье, то фазовые кривые векторного поля можно представлять себе как траектории движения бумажного кораблика (см. рис. 21).

При умножении правой части дифференциального уравнения $v(x) \in \mathbb{R}^n$ на произвольное число фазовый портрет не изменится. Поэтому по фазовому портрету нельзя восстановить дифференциальное уравнение. Более того, несложно увидеть, что

Пример 6.7. *У уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = x^3$ одинаковые фазовые кривые, но разные решения.*

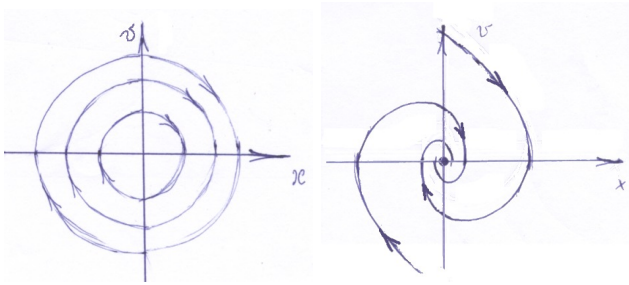

Рис. 22. Центр и фокус

В разделе 1.3 мы рассмотрели два автономных уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

(физический маятник) и

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

(физический маятник с вязким трением), и нарисовали их фазовые портреты. На рис. 22 эти рисунки приведены еще раз. Фазовый портрет физического маятника часто называют *центром*, физического маятника с трением — *фокусом*.

Для автономных дифференциальных уравнений, как для уравнений общего вида, можно рассматривать поля направлений и интегральные кривые. Интегральная кривая — это кривая в области $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$; эта область называется *расширенным фазовым пространством* автономного уравнения, в отличие от *фазового пространства* Ω.

Из определений сразу следует такое наблюдение:

Предложение 6.8. *Если интегральные кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$ (кривые в области $\mathbb{R} \times \Omega$) спроецировать на область Ω, получатся фазовые кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$.*

Упражнение 13. *Попробуйте нарисовать (или представить себе) поля направлений и интегральные кривые для систем уравнений из раздела 1.3.*

Указание: это поля направлений в трёхмерном пространстве.

7. Прямые произведения систем и метод разделения переменных

7.1. Связь фазовых и интегральных кривых. В этом разделе мы увидим, что фазовые кривые автономного уравнения являются интегральными кривыми некоторого нового уравнения. При этом новое уравнение имеет меньшую размерность. Такая конструкция позволяет понизить размерность автономного дифференциального уравнения.

Для простоты мы будем рассматривать только случай уравнений на плоскости $\Omega \in \mathbb{R}^2$; все результаты можно перенести и на общий случай.

Пример 7.1. *Фазовые кривые уравнения* $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ *(см. рис. 22) совпадают с интегральными кривыми уравнения* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ *(см. рис 12).*

Возьмём автономное дифференциальное уравнение на плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \tag{41}$$

здесь $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть функции F и G непрерывны в Ω и не обращаются в нуль одновременно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \tag{42}$$

Уравнение (42) будем рассматривать вместе с его обратным (см. определение 4.5).

Теорема 7.2. *Фазовые кривые системы* (41) *(вне точек* (x, y)*, для которых* $F(x, y) = G(x, y) = 0$*) являются интегральными кривыми уравнения* (42)*, и наоборот.*

Эту теорему мы докажем в разделе 7.3. Ниже мы дадим набросок её доказательства в одном важном частном случае.

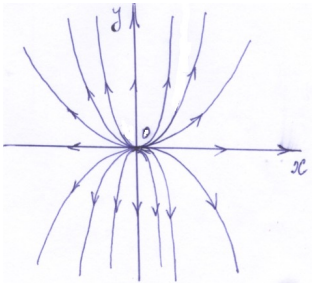

Рис. 23. Узел: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{y} = 2y$

Определение 7.3. **Декартовым** (или **прямым**) **произведением** уравнений $\dot{x} = f(x)$ и $\dot{y} = g(y)$ называется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{y} = g(y), \end{cases} \tag{43}$$

Примеры декартовых произведений изображены на рис. 23–25. Эти векторные поля имеют названия: *узел*, *седло* и *седло-узел*.

Эскиз доказательства теоремы 7.2 в случае декартова произведения. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение уравнения (43), т.е. $(x(t), y(t))$ — фазовая кривая уравнения (43). В окрестности значения t, для которого $\dot{x}(t) \neq 0$, мы можем выразить t через

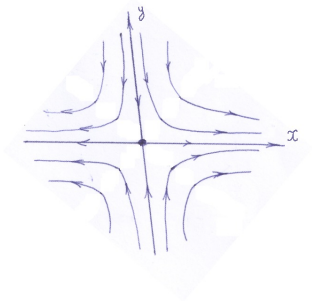

Рис. 24. Седло: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x$ и $\dot{y} = -y$

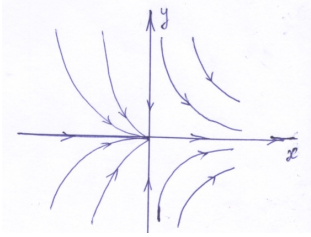

Рис. 25. Седлоузел: декартово произведение уравнений $\dot{x} = x^2$ и $\dot{y} = -y$

x, пользуясь теоремой об обратной функции; другими словами, существует функция $t(x)$, обратная к функции $x(t)$. Рассмотрим функцию $y(t(x)) =: y(x)$. График этой функции совпадает с кривой $(x(t), y(t))$. Оказывается, функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое является частным уравнений системы (43):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{f(x)} \tag{44}$$

Действительно, производную этой функции можно вычислить по формулам производной сложной функции и производной обратной функции:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(t)}{dt}\frac{dt(x)}{dx} = g(y)\frac{1}{f(x)} = \frac{g(y)}{f(x)}.$$

Мы только что доказали, что фазовые кривые системы уравнений (43) являются интегральными кривыми уравнения (44). Правда, мы рассмотрели только случай $\dot{x}(t) \neq 0$. Если $\dot{x}(t) = 0$, те же соображения нужно применить к функции $y(t)$.

Чтобы доказать, что интегральные кривые $y(x)$ системы уравнений (44) являются фазовыми кривыми уравнения (43), нужно провести рассуждение в обратную сторону. Более формально, нужно ввести функцию $t(x)$, производная которой равна $\frac{1}{f(x)}$, а потом проверить, что обратная к ней функция $x(t)$ и сложная функция $y(t(x))$ удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = f(x), \dot{y} = g(y)$.

Задача 14. *Завершите доказательство теоремы 7.2 для декартова произведения уравнений.*

Мы не будем приводить решение этой задачи, так как позже в разделе 7.3 мы докажем теорему 7.2 в общем случае. Заметим, что в разделе 7.3 доказательство первой части теоремы 7.2 упрощено с помощью геометрических соображений.

Как мы увидим в следующем разделе, теорема 7.2 для декартовых произведений уравнений даёт обоснование метода разделения переменных.

7.2. Метод разделения переменных. Заметим, что мы умеем решать уравнение (43) (так как умеем решать каждое из уравнений системы по отдельности):

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\zeta}{f(\zeta)},$$

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}.$$

По теореме 7.2 для декартовых произведений, фазовые кривые системы (43) совпадают с интегральными кривыми уравнения (44). Поэтому уравнение (44) мы тоже умеем решать:

Следствие 7.4. *Интегральные кривые уравнения* (44) *даются формулой*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} \tag{45}$$

Таким образом, мы научились решать уравнения вида (44). Уравнения такого вида называются «уравнениями с разделяющимися переменными», а описанный метод решения уравнений вида (44) носит название *метода разделения переменных*. Напомним, что мы уже рассматривали метод разделения переменных для уравнения $\dot{x} = x$ (см. раздел 2.4).

Формулу (45) можно получить, если формально домножить обе части уравнения (44) на $(1/g(y))dx$, а потом проинтегрировать обе части равенства. В разделе 2.4 мы отметили, что такой выкладке еще нужно придать смысл; в разделе 11.4 мы сделаем это с помощью понятия *дифференциальной формы*.

Упражнение 15. *Найдите фазовые кривые системы уравнений Лотки—Вольтерры:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy, \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \tag{46}$$

Эта система — математическая модель системы «хищник – жертва» в живой природе (см. раздел 12.4).

Указание. Примените теорему 7.2, чтобы перейти к интегральным кривым одномерного дифференциального уравнения. Затем решите полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

Фазовые кривые уравнения Лотки—Вольтерры найдены другим способом в разделе 12.4 (см. рис. 33).

7.3. Доказательство теоремы 7.2. *1. Фазовые кривые системы уравнений* (41) *являются интегральными кривыми уравнения* (42).

Фазовая кривая системы уравнений (41) в каждой своей точке касается вектора $(F(x,y), G(x,y))$. Значит, в каждой своей точке она касается прямой, содержащей этот вектор. Тангенс угла наклона этой прямой равен $\frac{G(x,y)}{F(x,y)}$. Это и есть прямая поля направлений, соответствующая уравнению (42). Значит, фазовая кривая является интегральной.

2. Интегральные кривые уравнения (42) *являются фазовыми кривыми системы* (41).

Заметим, что на интегральной кривой $(x, y(x))$ нет дополнительной параметризации временем t (она параметризована переменной x), а фазовая кривая $(x(t), y(t))$ параметризована временем t. Поэтому, чтобы доказать, что интегральная кривая является фазовой, надо ввести на ней параметр t. Для этого достаточно найти зависимость $t(x)$ или $t(y)$.

Вектор скорости интегральной кривой (при любой параметризации) содержится в прямой поля направлений, поэтому параллелен вектору $(F(x,y), G(x,y))$. Наша задача — добиться, чтобы этот вектор совпадал с вектором $(F(x,y), G(x,y))$.

Пусть $F(x_0,\, y_0) \neq 0$, и $y = y(x), y_0 = y(x_0)$ — интегральная кривая уравнения (42). Функцию $t(x)$ мы найдём из следующего

дифференциального уравнения:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{F(x, y(x))} \tag{47}$$

Правая часть этого уравнения зависит только от x. Решение таких уравнений было получено в курсе математического анализа (см. также раздел 5.1).

Пусть $t(x)$ — решение уравнения (47). Производная функции $t(x)$ ненулевая (она равна $1/F(x, y(x))$). Поэтому в окрестности точки $t(x_0)$ существует обратная функция $x(t)$. Производная обратной функции равна

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y(x)).$$

Производная сложной функции $y(x(t))$ равна

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}F(x, y) = G(x, y).$$

Итак, пара функций $(x(t), y(t))$ является решением системы (41) (другими словами, вектор скорости кривой $(x(t), y(t))$ равен вектору векторного поля $(F(x, y), G(x, y))$). Поэтому кривая $y(x)$ является фазовой кривой для уравнения (41).

Если $F(x_0, y_0) = 0$, то вместо уравнения (42) нужно рассматривать его обратное, а координаты x и y в рассуждении надо поменять местами.

8. Фазовые потоки. Существование фазового потока на прямой

Значение $x(t)$ решения автономного дифференциального уравнения в момент времени t можно рассматривать как функцию двух переменных: переменной t и начального условия x_0 в нулевой момент времени. Для этой функции двух переменных — *фазового потока* — вводят специальное обозначение $g^t x_0$. Такое обозначение удобно использовать, изучая зависимость решения дифференциального уравнения от начального условия.

Определение 8.1. Пусть решение автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с любым начальным условием $x(0) = x_0, x_0 \in \Omega$ существует, единственно и не покидает область Ω: $x(t) \in \Omega$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Преобразование фазового потока за время t (или **поток дифференциального уравнения за время** t) — это отображение $g^t \colon \Omega \to \Omega$, заданное равенством

$$g^t x_0 := x(t),$$

где $x(t)$ — решение дифференциального уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$. Набор преобразований $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ (другими словами — функция $g^t x$ двух переменных t и x) называется **фазовым потоком**.

Пример 8.2. *Рассмотрим уравнение*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

(см. рис. 24). Его решения — $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{-t}$ (напомним, что решения уравнения $\dot{x} = x$ мы нашли в параграфе 2. Решения уравнения $\dot{y} = -y$ можно получить аналогичным образом). Поэтому фазовый поток этого уравнения переводит точку (x_0, y_0) в точку $(x_0 e^t, y_0 e^{-t})$:

$$g^t(x_0, y_0) = (x_0 e^t, y_0 e^{-t}).$$

Например, фазовый поток за время 1 g^1 переводит квадрат $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ в прямоугольник $x \in [-e, e], y \in [-e^{-1}, e^{-1}]$.

На рисунке 26 изображен образ квадрата $x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]$ под действием фазового потока g^1 для следующих дифференциальных уравнений на плоскости:

1. $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$;
2. $\dot{x} = x, \dot{y} = y$;
3. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$;

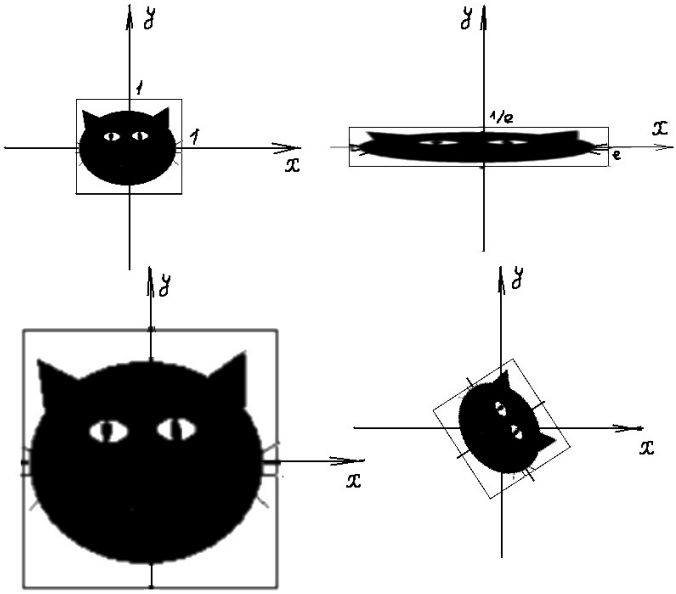

Рис. 26. Образ квадрата и мордочки кота под действием фазового потока уравнений (1)–(3)

Для наглядности изображен также образ мордочки кота, нарисованной в этом квадрате, под действием g^1.

Оказывается, при некоторых дополнительных ограничениях на поле v фазовый поток непрерывен по переменным t и x. Кроме того, все отображения потока g^t являются *диффеоморфизмами*:

Определение 8.3. **Диффеоморфизм** — это биективное непрерывно дифференцируемое отображение, обратное к которому тоже непрерывно дифференцируемо.

Следующее утверждение будет доказано в конце семестра.

Предложение 8.4. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, и пусть g^t — фазовый поток уравнения $\dot{x} = v(x)$. Тогда отображение $(x, t) \mapsto g^t(x)$ непрерывно по совокупности переменных (во всей области определения), а все отображения g^t — диффеоморфизмы.*

Упражнение 16. *Докажите предложение 8.4 для $\Omega \subset \mathbb{R}$.*

Оказывается, что отображения g^t подчиняются формуле, напоминающей формулу для произведения экспонент $e^{t+s} = e^t e^s$:

Предложение 8.5. *Для любых $\tau, s \in \mathbb{R}$ выполнено $g^{\tau+s} = g^s \circ g^\tau$.*

Доказательство. Проверим, что $g^{\tau+s}(x_0) = g^s(g^\tau(x_0))$ для любого $x_0 \in \Omega$.

Пусть $x(t)$ — решение дифференциального уравнения с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда $g^\tau(x_0) = x(\tau)$, $g^{\tau+s}(x_0) = x(\tau + s)$.

Чтобы вычислить $g^s(g^\tau(x_0))$, надо найти решение дифференциального уравнения с начальным условием $g^\tau(x_0)$. Но этим решением является функция $x(t+\tau)$. Проверим это. Во-первых, функция $x(t + \tau)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = v(x)$: действительно, этому автономному уравнению удовлетворяет функция $x(t)$, значит, и функция $x(t+C)$ для любой константы C, в частности, для $C = \tau$. Во-вторых, $x(0 + \tau) = x(\tau) = g^\tau(x_0)$, то есть функция $x(t + \tau)$ удовлетворяет начальному условию.

Итак, $g^s(g^\tau(x_0)) = x(\tau + s) = g^{\tau+s}(x_0)$, что и требовалось доказать. □

Это предложение означает, что множество отображений g^t образует группу относительно операции композиции, и эта

группа изоморфна группе вещественных чисел по сложению $(\mathbb{R}, +)$. Отсюда (и из предложения 8.4) следует, что фазовый поток — это *действие группы* $\mathbb{R}$ на множестве Ω диффеоморфизмами.

Определение 8.6. **Однопараметрической группой диффеоморфизмов множества** Ω (или **действием группы** $\mathbb{R}$ **диффеоморфизмами на множестве** Ω) называется семейство диффеоморфизмов $h_s\colon \Omega \to \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, для которых $h_0 = id$ и $h_{s+t} = h_s \circ h_t$.

Оказывается, что фазовый поток содержит в себе *всю* информацию об уравнении.

Вопрос. *Как найти функцию $v(x)$, если нам известен фазовый поток g^t при любом t (и все отображения g^t определены)?*

Ответ. *Воспользуемся тем, что функция $x(t) = g^t(x_0)$ является решением дифференциального уравнения:*

$$\left.\frac{dg^t(x_0)}{dt}\right|_{t=0} = v(x_0).$$

Из этой формулы, зная g^t, можно найти $v(x)$.

Задача 17. *Пусть мы знаем отображения g^t только для целых t. Можно ли по этой информации восстановить $v(x)$?*

Если решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ существует не при всех t, то некоторые из отображений g^t могут быть не всюду определены.

Вопрос. *Рассмотрим уравнение $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}$. При каких условиях на v определен фазовый поток этого уравнения на всей прямой?*

Пример 8.7. *Например, для уравнения $\dot{x} = x^2$ фазовый поток не определён (проверьте это)!*

Мы приведем ответ на этот вопрос в достаточно общем случае.

Теорема 8.8. ***Случай 1.*** Функция v имеет конечное число нулей:

$$-\infty < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < +\infty.$$

Пусть все интегралы

$$\int_{-\infty}^{a_0-\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_0-\varepsilon}^{a_0} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_0}^{a_0+\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)},$$
$$\int_{a_1-\varepsilon}^{a_1} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_1}^{a_1+\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)},$$
$$\int_{a_2-\varepsilon}^{a_2} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_2}^{a_2+\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)},$$
$$\dots$$
$$\int_{a_n-\varepsilon}^{a_n} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_n}^{a_n+\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_n+\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\xi}{v(\xi)}$$

расходятся. Тогда фазовый поток определен, и каждое решение уравнения заключено между какими-то соседними нулями a_i, a_{i+1} *функции* v *или на одном из лучей* $(a_n, +\infty)$, $(-\infty, a_0)$.

Случай 2. Функция v имеет бесконечное дискретное множество нулей:

$$\dots < a_{-n} < \dots < a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots.$$

Пусть для любого целого n *интегралы*

$$\int_{a_n-\varepsilon}^{a_n} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \int_{a_n}^{a_n+\varepsilon} \frac{d\xi}{v(\xi)}$$

расходятся. Тогда фазовый поток определен, и каждое решение уравнения заключено между какими-то соседними нулями a_i, a_{i+1} *функции* v.

Доказательство. Рассмотрим решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Докажем, что такое решение единственно. Действительно, это следует из теоремы 5.11, применённой в окрестности точки x_0.

Докажем, что это решение заключено между соседними нулями функции f. Действительно, пусть $x_0 > a_m$. Функция $y(t) \equiv a_m$ является решением уравнения $\dot{x} = v(x)$, поэтому её

график (прямая $x = a_m$) не должен пересекать график функции $x(t)$ в силу единственности решения уравнения. Значит, $x(t) > a_m$ для любого t. Итак, если начальное условие заключено между соседними нулями функции v, то и решение уравнения с таким начальным условием заключено между этими нулями.

Осталось доказать, что решение существует при любом значении t. Для $x_0 = a_k$ это утверждение очевидно (функция $x(t) \equiv a_k$ определена при всех значениях t).

Пусть для некоторого значения m выполнено $x_0 \in (a_m, a_{m+1})$.

Рассмотрим наибольший по включению (возможно, бесконечный) интервал (t_1, t_2), $t_0 \in (t_1, t_2)$, на котором определено решение уравнения $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Нам нужно доказать, что этот интервал совпадает со всей числовой прямой. Пусть это не так, $t_1 \neq \infty$. Вычислим предел $\lim\limits_{t \to t_1} x(t)$. Напомним, что

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{v(x)}. \tag{48}$$

Функция $t(x)$ монотонна, так как функция $1/v(x)$ знакопостоянна на отрезке (a_m, a_{m+1}), а значение $x(t)$ содержится в этом отрезке. Значит, обратная к ней функция $x(t)$ тоже монотонна. Предел монотонной функции $x(t)$ (конечный или бесконечный) всегда существует. Переходя к пределу в формуле (48) при $t \to t_1 + 0$, получаем

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0}^{x(t_1+0)} \frac{dx}{v(x)}.$$

Здесь $x(t_1 + 0) := \lim\limits_{t \to t_1+0} x(t)$. Отсюда следует, что предел $\lim\limits_{t \to t_1+0} x(t)$ не совпадает с a_m и a_{m+1}: иначе, по условию расходимости интеграла, правая часть равенства была бы бесконечна, а левая — конечна.

Теперь мы можем чуть-чуть увеличить интервал (t_1, t_2), на котором определена функция $x(t)$. А именно, рассмотрим решение $y(t)$ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $y(t_1) =$

$x(t_1+0)$. В окрестности точки $(t_1, x(t_1))$ функция v не обращается в 0, поэтому по теореме 5.11 в правой полуокрестности точки t_1 функция $y(t)$ совпадает с функцией $x(t)$. Объединим эти функции в одну, положив $\tilde{x}(t) = x(t), t > t_1$, и $\tilde{x}(t) = y(t), t \leqslant t_1$. Новая функция $\tilde{x}$ является решением нашего уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и определена на большем отрезке. Мы получаем противоречие с выбором отрезка (t_1, t_2).

Итак, решение с начальным условием x_0 определено при любом t.

В случае 1 может получиться так, что $x_0 > a_n$ или $x_0 < a_0$. Эти случаи разбираются аналогично; если $x_0 > a_n$, несобственный интеграл первого рода $\int_{x_0}^{a_{n+1}} \frac{1}{v(x)} dx$ в рассуждении заменяется на несобственный интеграл второго рода $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{v(x)} dx$, а если $x_0 < a_0$, — на интеграл $\int_0^{a_0} \frac{1}{v(x)} dx$.

□

Из этой теоремы (воспользовавшись предложениями 5.14 и 5.15) можно получить следствие:

Следствие 8.9. *Пусть v — C^1-гладкая функция, множество нулей которой неограниченно с обеих сторон. Тогда фазовый поток уравнения $\dot{x} = v(x)$ определен, и каждое решение уравнения заключено между какими-то соседними нулями функции v.*

9. Линейные уравнения на прямой

Один из самых простых классов дифференциальных уравнений — это уравнения, правая часть которых линейно зависит от неизвестной функции. С другой стороны, эти уравнения уже достаточно интересны для изучения.

В одномерном случае линейное уравнение — это уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \tag{49}$$

где функции $a(t)$ и $b(t)$, как обычно, предполагаются непрерывными. Напомним, что в параграфе 2 мы уже решали линейное одномерное уравнение с постоянными коэффициентами $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$.

9.1. Линейные однородные одномерные уравнения. В этом разделе мы решим линейное уравнение в нулевым свободным членом:

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{50}$$

$b(t) \equiv 0$. Такие уравнения называют *однородными линейными уравнениями*, так как правая часть однородна по x и имеет степень 1.

Применим метод разделения переменных:

$$\frac{dx}{x} = a(t)dt,$$

откуда

$$\ln|x(t)| - \ln|x_0| = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau.$$

Итак, решение линейного уравнения — это функция

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{51}$$

Можно сделать следующее наблюдение:

Предложение 9.1. *Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решения линейного однородного уравнения* (50)*. Тогда их сумма $x_1(t)+x_2(t)$, а также функция $Cx_1(t)$ (где C — постоянная) тоже удовлетворяют уравнению* (50)*. Другими словами,* ***решения линейного однородного уравнения образуют векторное пространство****.*

Это утверждение, конечно, следует из формулы (51). Но гораздо проще подставить в уравнение (50) функции $x_1(t) + x_2(t)$ и $Cx_1(t)$.

Упражнение 18. *Докажите предложение 9.1.*

Векторное пространство решений уравнения (50) одномерно: любое решение однородного уравнения представляется в виде $C\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — какое-то фиксированное решение однородного уравнения (например, $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$).

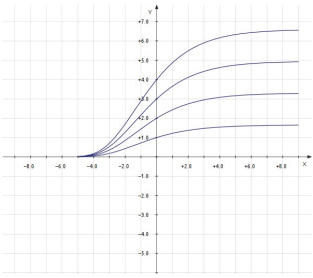

Рис. 27. Кривые Gompertz'a для $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.25$, $V_0 = 1, 2, 3, 4$

9.1.1. Пример: уравнение Gompertz'a для роста раковой опухоли. В стандартной модели роста опухоли, маленькая опухоль растет со скоростью, пропорциональной её размеру: $\dot{V} = V$. Такое уравнение мы уже исследовали в параграфе 2. Но потом, когда объем опухоли V увеличивается, её рост замедляется. Уравнение роста опухоли принимает вид

$$\dot{V} = \lambda e^{-\alpha t} V$$

где λ и α — некоторые постоянные (уравнение Gompertz'a).

Решение этого уравнения с начальным условием $V(0) = V_0$ имеет вид

$$V(t) = V_0\, e^{\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$$

в соответствии с формулой (51). Интегральные кривые уравнения Gompertz'a носят название «кривые Gompertz'a» (см. рис. 27). Заметим, что при $t \to \infty$ функция $V(t)$ имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = V_0\, e^{\frac{\lambda}{\alpha}},$$

то есть объем опухоли стабилизируется, и предельное значение объема опухоли линейно зависит от её исходного объема V_0.

9.2. Линейные неоднородные одномерные уравнения. В предыдущем разделе мы рассматривали линейные однородные уравнения (50) и получили формулу (51) для их решений, а также заметили, что их решения образуют одномерное векторное пространство.

В этом разделе мы изучим линейные неоднородные уравнения (49). Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения уравнения (49), их

сумма $x_1(t) + x_2(t)$ уже не удовлетворяет уравнению (49). Зато их *разность* $x_1(t) - x_2(t)$ является решением уравнения (50). Это означает, что решения линейных неоднородных уравнений образуют аффинное пространство.

Ниже мы приведём формальное определение аффинного пространства. Неформально говоря, аффинное пространство — это линейное пространство без выделенной точки 0. Пример аффинного одномерного пространства — это прямая на плоскости, не проходящая через 0.

Определение 9.2. Аффинное пространство A над векторным пространством V — это множество, на котором определена операция **прибавления любого элемента векторного пространства** V. При этом

- $a + (v + w) = (a + v) + w$, где $v, w \in V, a \in A$;
- для любых двух элементов $a, a_1 \in A$ найдется единственный элемент v, для которого $a + v = a_1$.

Отображение аффинных пространств $f\colon A_1 \to A_2$ над одним и тем же векторным пространством V называется аффинным, если оно взаимно однозначно и сохраняет структуру аффинного пространства: $f(a + v) = f(a) + l(v)$, где l — линейное отображение $l\colon V \to V$.

Аффинное пространство можно отобразить в векторное пространство. Для этого какой-нибудь элемент $a \in A$ нужно отобразить в 0, а элемент вида $a + v$ отобразить в v. Такое отображение будет взаимно однозначным (докажите это!). Таким образом, если какой-нибудь элемент аффинного пространства назвать нулём, оно превратится в векторное пространство. Поэтому говорят, что аффинное пространство — это векторное пространство без фиксированного нуля.

Упражнение 19. *Проверьте, что решения линейного неоднородного уравнения образуют аффинное пространство над пространством решений соответствующего однородного уравнения.*

Из этого простого упражнения следует, что если мы знаем *одно* решение неоднородного уравнения (49), то остальные решения уравнения (49) получаются прибавлением всевозможных

решений однородного уравнения. Другими словами, выполнено такое утверждение.

Предложение 9.3. *Общее решение линейного неоднородного уравнения* (49) *(т.е. его произвольное решение) имеет вид:*

$$x_{общ}(t) = x_p(t) + C\varphi(t), \tag{52}$$

где $\varphi(t)$ *— решение однородного уравнения* (50), x_p *— частное решение (т. е. какое-то одно решение) неоднородного уравнения* (49).

Это предложение является частным случаем чрезвычайно общего факта: *Пространство решений линейного неоднородного уравнения любой природы: алгебраического, обыкновенного дифференциального, в частных производных и т. д. является аффинным пространством над пространством решений соответствующего линейного однородного уравнения.*

Другими словами, *Общее решение линейное неоднородной системы равно сумме частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

Упражнение 20. *Сформулируйте это утверждение для линейных однородных и неоднородных систем. Помните ли вы доказательство этого утверждения (оно входит в стандартный курс линейной алгебры)?*

Чтобы решить линейное уравнение, нам осталось только подобрать частное (то есть какое-нибудь одно) решение уравнения (50). Для этого мы используем метод вариации постоянной.

9.3. Метод вариации постоянной. Любое решение однородного линейного уравнения имеет вид $C\varphi(t)$, где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Будем подбирать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$x_p(t) = C(t)\varphi(t), \text{ где } x_p(t_0) = 0$$

— *проварьируем* постоянную C. Мы получаем следующее уравнение на функцию $C(t)$:

$$\dot{C}(t)\varphi(t) + C(t)\dot{\varphi}(t) = a(t)C(t)\varphi(t) + b(t), \quad C(t_0) = 0. \tag{53}$$

Но функция φ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\dot{\varphi}(t) = a\varphi(t),$$

откуда

$$\dot{C}(t)\varphi(t) = b(t).$$

Следовательно,

$$\dot{C}(t) = \varphi(t)^{-1}b(t), \quad C(t_0) = 0.$$

Частное решение $x_p(t)$ неоднородного уравнения находится теперь с помощью теоремы Ньютона—Лейбница. Более подробно,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau;$$

итак, частное решение линейного неоднородного уравнения равно

$$x_p(t) = \varphi(t)C(t). \tag{54}$$

В силу предложения 9.3, общее решение неоднородного уравнения (49) равно

$$x_{\text{общ}}(t) = x_p(t) + C_0\varphi(t).$$

Окончательно,

$$x_{\text{общ}}(t) = \left(C_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau\right)\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ задано выше.

Из этой формулы, в частности, следует, что решения линейных уравнений определены при любом t.

Пример 9.4 (Уравнение Бернулли)**.** *Уравнением Бернулли называется уравнение вида*

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n. \tag{55}$$

Если разделить это уравнение на x^n, а затем обозначить $z := x^{1-n}$, уравнение примет вид

$$\dot{z} = f(t)z + g(t).$$

То есть уравнение Бернулли превратится в линейное неоднородное уравнение.

Упражнение 21. *Решите уравнение Бернулли* (55).

Исследуем преобразование потока для линейного уравнения. Конечно, понятие фазового потока (см. параграф 8) относится только к автономным уравнениям. Но определение можно обобщить и на общий случай.

9.4. Преобразование потока неавтономного уравнения. Решение неавтономного уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ можно рассматривать как функцию трёх переменных: t_0, x_0 и t. Эта функция трёх переменных называется фазовым потоком неавтономного уравнения, для неё вводят обозначение $g_{t_0}^t x_0$. Дадим формальное определение:

Определение 9.5. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,\, x),\ x \in \mathbb{R} \tag{56}$$

Пусть его решение с любым начальным условием существует, единственно и определено при любом значении t. **Преобразованием потока** этого уравнения называется отображение

$$g_{t_0}^{t_1} : x_0 \mapsto x(t_1),$$

где $x(t)$ — решение уравнения (56) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Упражнение 22. *Докажите, что для автономного уравнения* $g_{t_0}^{t_1} = g^{t_1 - t_0}$.

Из определения сразу следует, что для отображения потока выполнено соотношение

$$g_{t_0}^{t_2} = g_{t_1}^{t_2} \circ g_{t_0}^{t_1}.$$

В случае автономных уравнений это равенство превращается в уже известное нам соотношение $g^{t+s} = g^t \circ g^s$.

9.5. Преобразования потока линейных уравнений на прямой. Для линейного однородного уравнения

$$g_{t_0}^{t_1} x = \left(e^{\int_{t_0}^{t_1} a(\tau) d\tau}\right) x = A(t_0,\, t_1) x.$$

То есть все отображения $g_{t_0}^{t_1}$ — линейные отображения, сохраняющие ориентацию (другими словами, линейные растяжения).

Итак, *преобразование потока линейного однородного уравнения линейно и сохраняет ориентацию.*

Для линейного неоднородного уравнения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, в силу предложения 9.3, преобразование потока имеет вид

$$g_{t_0}^{t_1} x = x_p(t_1) + A(t_0, t_1)x,$$

где частное решение x_p дается формулой (54). Итак, *преобразование потока линейного неоднородного уравнения — аффинное отображение, сохраняющее ориентацию (другими словами, является композицией сдвига и линейного растяжения).*

Упражнение 23. *Найдите преобразования потока*

а) для линейного уравнения $\dot{x} = x + \sin t$

б) для линейного уравнения $\dot{x} = xt + 1$

в) для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

9.6. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. В этом пункте мы изучим линейные неоднородные уравнения, коэффициенты которых периодичны с некоторым (общим) периодом T:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \text{ где } a(t+T) = a(t),\ b(t+T) = b(t) \text{ для любого } t. \tag{57}$$

Насколько сильно меняется решение уравнения за один период? Периодичны ли решения уравнения? Как поведут себя решения уравнения в далеком будущем (когда t стремится к бесконечности)?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим преобразование фазового потока за период:

$$g_0^T(x) = A(0, T)x + B(0, T) \tag{58}$$

Это аффинное отображение называется *отображением монодромии* уравнения с периодическими коэффициентами.

Периодические решения нашего уравнения соответствуют неподвижным точкам отображения g_0^T. Действительно, если $g_0^T(x) = x$, то

$$g_0^{T+t}(x) = g_T^{T+t} \circ g_0^T(x) = g_T^{T+t}(x) = g_0^t(x)$$

(последнее равенство следует из T–периодичности коэффициентов уравнения), значит, решение $x(t) = g_0^t(x)$ периодично.

Напомним, что преобразование потока линейного неоднородного уравнения (в частности, преобразование монодромии) аффинно. Что можно сказать о неподвижных точках произвольного аффинного отображения прямой, сохраняющего ориентацию:

$$g\colon x \mapsto Ax + B, A > 0?$$

1. Общий случай: $A \neq 1$.

   В этом случае преобразование g — растяжение с коэффициентом A относительно неподвижной точки $x_0 = \frac{B}{1-A}$.

2. Вырожденный случай: $A = 1$. В этом случае $g : x \mapsto x + B$—перенос.

   (a) Невырожденный (типичный) перенос: $B \neq 0$. Неподвижных точек нет.

   (b) Вырожденный перенос: $B = 0$. В этом случае преобразование g тождественно, и все точки неподвижны.

Первый случай встречается чаще всего.

На рис. 28, 29 и 30 изображены интегральные кривые нескольких уравнений, для которых преобразования монодромии имеют тип 1, 2a) и 2b) соответственно.

Теорема 9.6. *Линейное одномерное дифференциальное уравнение с T-периодическими коэффициентами имеет единственное T-периодическое решение, если и только если интеграл по периоду от коэффициента при линейном члене отличен от нуля:*

$$\int_0^T a(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Преобразование монодромии уравнения (57) аффинно и имеет вид

$$x \mapsto Ax + B, \quad \text{где } A = e^I,\ I = \int_0^T a(t)dt.$$

Оно имеет единственную неподвижную точку, если и только если $A \neq 1$, т.е. $I \neq 0$. □

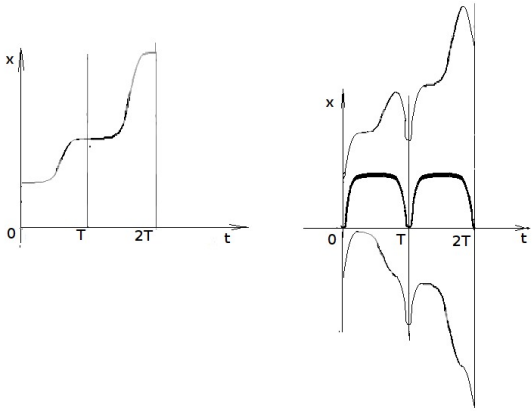

Рис. 28. Интегральные кривые уравнения с преобразованием монодромии общего вида (случай 1)). График решения однородного уравнения изображен на левом рисунке, а график частного решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием выделен жирным на правом рисунке

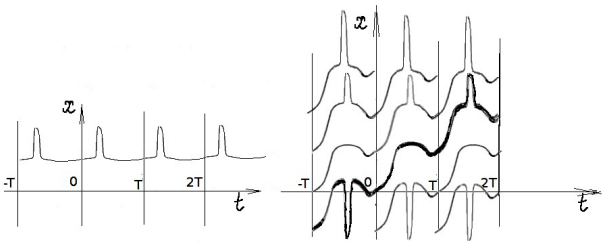

Рис. 29. Интегральные кривые уравнения, преобразование монодромии для которого — сдвиг (случай 2а). График решения однородного уравнения изображен на левом рисунке, а график частного решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием выделен жирным на правом рисунке.

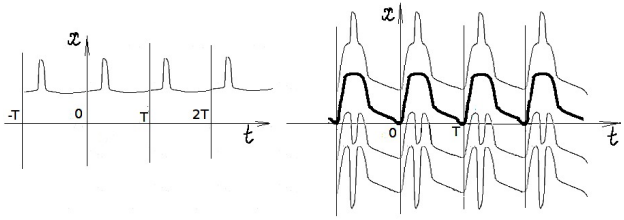

Рис. 30. Интегральные кривые уравнения с тождественным преобразованием монодромии (случай 2b). График решения однородного уравнения изображен на левом рисунке, а график частного решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием выделен жирным на правом рисунке.

Эта теорема позволяет легко узнавать уравнения вида (57) с единственным периодическим решением.

Задача 24. *Найти все значения α, при которых уравнение*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

имеет единственное 2π-периодическое решение, для

1. $a(t) = \sin t + \alpha,\ b(t) = \cos^2 t$;
2. $a(t) = \sin^2 t + \alpha,\ b(t) = \cos^2 t$;
3. $a(t) = \sin^3 t + \alpha,\ b(t) = \cos^2 t$;
4. $a(t) = \sin^4 t + \alpha \sin^2 t + 2\alpha,\ b(t) = \cos^2 t$.

Указание. В силу предыдущей теоремы, вид функции $b(t)$ не влияет на ответ. Функция $a(t)$ во всех задачах — тригонометрический многочлен, то есть имеет вид $b_0 + \Sigma_1^N a_k \sin kt + \Sigma_1^N b_k \cos kt$. Интеграл такой функции за период $T = 2\pi$ равен $2\pi b_0$, и отличен от нуля в том и только том случае, когда свободный член b_0 отличен от нуля. В первой задаче свободный член равен α, во второй $b_0 = \frac{1}{2} + \alpha$. Значит, ответы в этих задачах —

(1). $\alpha \neq 0$,

(2). $\alpha \neq -\frac{1}{2}$.

Решите остальные задачи.

Задача 25. *Найти все значения α, при которых уравнения* (1)–(4) *из предыдущей задачи и уравнения, приведенные ниже, имеют хотя бы одно 2π-периодическое решение:*

1. $\dot{x} = (\sin t + \alpha)x + \cos t$;

2. $\dot{x} = (\sin^2 t + \alpha)x + \cos 2t$.

Указание. Эта задача приводит к исследованию интегралов, которые не берутся. Однако не обязательно брать интеграл, чтобы убедиться, что он отличен от нуля.

Задача 26. *Доказать, что если линейное дифференциальное уравнение с 1-периодическими коэффициентами имеет непостоянное T-периодическое решение, то это решение также 1-периодично, а число T рационально.*

С помощью преобразования монодромии можно также понять, как ведут себя решения уравнения (57) на бесконечности.

Задача 27. *Докажите, что если интеграл $I = \int_0^T a(t)dt$ положителен, то все решения уравнения* (57) *удаляются от периодического решения на бесконечности, а если этот интеграл отрицателен, приближаются к нему сколь угодно близко.*

10. Симметрии уравнений

В разделах 5.1 и 5.2 мы уже сталкивались с симметриями дифференциальных уравнений. В разделе 5.1 поле направлений уравнения сохранялось при любом сдвиге $x \mapsto x+C$, а в разделе 5.2 — при любом сдвиге $t \mapsto t + C$.

В этом параграфе мы узнаем, как симметрии помогают решить дифференциальное уравнение. Сначала разберем еще один пример симметрии.

10.1. Однородные уравнения. Однородными называются уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{x}{t}\right) \tag{59}$$

Легко доказать следующее предложение:

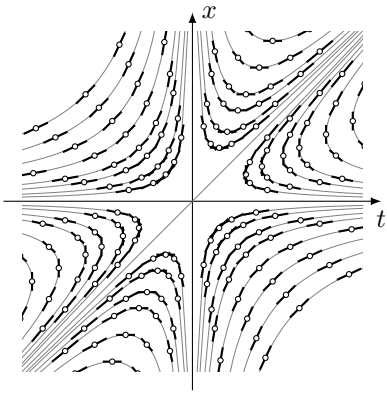

Рис. 31. Поле направлений и интегральные кривые однородного уравнения

Предложение 10.1. *Поле направлений уравнения* (59) *не меняется при растяжении* $t \mapsto \lambda t$, $x \mapsto \lambda x$. *Другими словами, если* $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$ *— интегральная кривая уравнения* (59) *и* $\lambda \neq 0$, *то* $t = \lambda t(\tau)$, $x = \lambda x(\tau)$ *— также интегральная кривая этого уравнения.*

Предложение 10.1 показывает, что у нашего уравнения есть *симметрия* — семейство отображений $(t, x) \to (\lambda t, \lambda x)$, которые сохраняют множество интегральных кривых.

В области $t \neq 0$ определим функцию $u(t, x) = \frac{x}{t}$ (можно сказать иначе: введем координаты (t, u), где $u = \frac{x}{t}$). Тогда для любого решения исходного уравнения $x(t)$ выполнено

$$\frac{dx}{dt} = F(u),$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ut)}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

В последнем равенстве $u = u(t, x(t))$ — функция одной переменной t. Итак,

$$\frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}.$$

Это уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dv}{F(v)-v} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{t} = \ln|t| - \ln|t_0|.$$

Мы получили неявную формулу для функции $u(t)$. Найдя функцию $u(t)$, легко найти и функцию $x(t)$ (напомним, что $u(t) = x(t)/t$).

Таким образом, однородные уравнения мы тоже научились решать. Оказывается, что можно сформулировать такой принцип: *наличие симметрии позволяет уменьшить число уравнений в системе.*

10.2. Общий случай. Мы уже дважды сталкивались с применением теории групп в дифференциальных уравнениях. В параграфе 8 мы определили фазовый поток уравнения как действие группы $\mathbb{R}$ на фазовом пространстве. В разделе 9.6 мы рассматривали циклическую группу, состоящую из отображений $g_0^{nT}, n \in \mathbb{Z}$; эта группа порождена преобразованием монодромии g_0^T. В этом разделе мы увидим еще одно применение теории групп в теории дифференциальных уравнений. Речь пойдет о группах симметрий.

Определение 10.2. **Симметрией** дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{60}$$

называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов $h_s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющих поле направлений.

Пример 10.3. *Например, для однородных уравнений симметрией является группа растяжений* $h_s(t,\, x) = (e^s t,\, e^s x)$.

Строго говоря, надо объяснить, что значит «сохранение поля направлений». Можно дать такое определение:

Определение 10.4. Пусть в области Ω_1 задано поле направлений $l(p), p \in \Omega$. Пусть задан диффеоморфизм $h\colon \Omega_1 \to \Omega_2$. Тогда в области Ω_2 возникает поле направлений $\tilde{l}(q)$: в точке $q = h(p)$ проведена прямая

$$\tilde{l}(q) \mathbin{||} dh_p l(p). \tag{61}$$

Здесь dh_p — дифференциал отображения h в точке p, то есть некоторое линейное отображение. Это линейное отображение мы и применяем к прямой $l(p)$.

Упражнение 28. *Докажите, что если кривая $\gamma \in \Omega_1$ касается поля направлений $l(p)$ в точке $p \in \Omega_1$, то образ этой кривой $h(\gamma)$ касается поля направлений $\tilde{l}(q)$ в точке $q = h(p)$. В частности, образ интегральной кривой поля направлений $l(p)$ под действием h — это интегральная кривая поля направлений $\tilde{l}(q)$.*

Определение 10.5. Диффеоморфизм $h\colon \Omega \to \Omega$ сохраняет поле направлений, если он отображает поле направлений в себя.

Сейчас мы увидим, как симметрия помогает решить дифференциальное уравнение. Нам дано однопараметрическое семейство отображений h_s, сохраняющих поле направлений. Отображения h_s задают следующее семейство кривых:

$$\{h_s(p) \mid s \in \mathbb{R}\}, \tag{62}$$

то есть для каждой кривой точка p фиксирована, а параметр s пробегает вещественную ось. Легко показать, что каждые две такие кривые или не пересекаются, или совпадают (это следует из определения однопараметрической группы отображений). Будем считать, что все эти кривые гладкие.

Пример 10.6. *Для автономных уравнений кривые* (62) *— горизонтальные прямые. Для однородных уравнений все кривые* (62)*, кроме одной, — это (открытые) лучи, выходящие из нуля; единственная исключительная кривая — это кривая, состоящая только из одной точки* $(0, 0)$.

Пусть нам удалось выбрать такую кривую $\Sigma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, что она пересекает все кривые (62) под ненулевым углом (т. е. трансверсально). Например, для однородного уравнения в качестве кривой Σ можно брать отрезок вертикальной прямой $t = 1$.

Тогда в окрестности кривой Σ можно ввести криволинейную систему координат $(u,\, s)$: точка с координатами $(u,\, s)$ — это точка $(t(u,s), x(u,s)) = h_s(\Sigma(u))$. Можно найти и обратную замену координат, выразив u и s через x, t.

Мы хотим от дифференциального уравнения на функцию $x(t)$ перейти к уравнению на функцию $u(s)$ (выполнить *замену переменной*). Другими словами, мы хотим написать уравнение на плоскости Osu, чтобы его интегральные кривые $(s, u(s))$ были образами интегральных кривых исходного уравнения под

действием отображения $(t,x) \to (s(t,x), u(t,x))$. Из упражнения 28 видно, что поле направлений на плоскости Osu должно быть образом поля направлений на плоскости Otx. Новое поле направлений можно вычислить по формуле (61).

Дадим, кроме этого геометрического описания, еще и аналитическое.

Если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (60), то кривая $(s(t,x(t)),\ u(t,x(t)))$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = u'_t + u'_x\dot{x} = u'_t + u'_x f(t,x(t)) \\ \dot{s}(t) = s'_t + s'_x\dot{x} = s'_t + s'_x f(t,x(t)) \end{cases} \tag{63}$$

то есть является фазовой кривой векторного поля $(u'_t + u'_x f(t,x(t)),\ s'_t + s'_x f(t,x(t)))$ (в это выражение надо подставить равенство $(t,x) = h_s(\Sigma(u))$, чтобы правая часть зависела только от u и s). По теореме 7.2, эта кривая является интегральной кривой уравнения

$$\frac{du}{ds} = \left.\frac{u'_t + u'_x f(t,x(t))}{s'_t + s'_x f(t,x(t))}\right|_{(t,x)=h_s(\Sigma(u))}. \tag{64}$$

Упражнение 29. *Докажите, что поле направлений уравнения* (64) *на плоскости Osu является образом старого поля направлений под действием отображения $(t,x) \mapsto (s(t,x), u(t,x))$ (то есть геометрическая и аналитическая конструкция совпадают).*

Итак, мы написали дифференциальное уравнение на плоскости Osu, интегральные кривые которого — образы интегральных кривых старого уравнения, а поле направлений — образ старого поля направлений под действием отображения $(t,x) \mapsto (s(t,x), u(t,x))$.

Пример 10.7. *Для автономного уравнения в качестве Σ можно взять вертикальную прямую $t = 1$. Получим $s = t, u = x$. Поэтому при замене уравнение не меняется.*

Для однородного уравнения в качестве Σ тоже можно взять вертикальную прямую $t = 1$. Получим $s(t,x) = \ln t$, $u(t,x) = x/t$; $t(u,s) = e^s$, $x(u,s) = u \cdot e^s$. Поэтому

$$u'_s = \frac{\dot{x}/t - x/t^2}{1/t} = \dot{x} - x/t = F(u) - u$$

(ср. с выкладкой из предыдущего раздела).

У уравнения (64) правая часть будет зависеть только от u. Действительно, сдвиг $s \mapsto s + C$ на плоскости Osu соответствует отображению h_C на плоскости Otx, а все отображения h_s сохраняют старое поле направлений. Значит, сдвиг $s \mapsto s + C$ сохраняет новое поле направлений. Это и значит, что правая часть уравнения не зависит от s, и уравнение (64) имеет вид

$$u'_s = f(u). \tag{65}$$

Если мы решим это уравнение, мы найдём зависимость $u(s)$. Так как u и s — это функции от x и t, зависимость $u(s)$ даст нам зависимость $x(t)$.

Но уравнение (65) автономно. Его фазовые кривые — это интегральные кривые уравнения меньшей размерности (см. теорему 7.2). Таким образом, *каждая симметрия уменьшает количество уравнений на 1.*

11. Дифференциальные формы

Определение дифференциальной 1-формы приведено в дополнении (см. параграф 14). Более подробно о дифференциальных формах можно прочитать, например, в книге *М. Спивак, Анализ на многообразиях*[1]. Оказывается, дифференциальные уравнения можно задавать не только с помощью векторных полей, но и с помощью двойственного объекта — дифференциальных форм. В этом параграфе мы научимся это делать и получим несколько важных следствий.

11.1. Дифференциальные уравнения, заданные с помощью дифференциальных форм.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ — кривая на плоскости (в более общем случае — в многомерном пространстве).

Рассмотрим касательное пространство $T_p\gamma$ к кривой γ в точке $p \in \gamma$. Это одномерное пространство порождено касательным вектором к кривой γ и не зависит от параметризации кривой γ.

[1] М. Спивак, *Анализ на многообразиях*, М: Мир, 1968.

Ограничим линейные функционалы dx и dy на пространство $T_p\gamma$. Эти ограничения достаточно задать на касательном векторе к кривой γ, так как этот вектор порождает пространство $T_p\gamma$:

$$dx(\dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t)) = \dot\gamma_1(t)$$
$$dy(\dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t)) = \dot\gamma_2(t).$$

Так как пространство $T_p\gamma$ одномерно, эти ограничения линейно зависимы. Если теперь фиксировать коэффициенты этой линейной зависимости, мы получим некоторое условие на кривую γ (точнее, на пространство $T_p\gamma$). Это условие и есть дифференциальное уравнение.

Более формально, выполнено такое утверждение:

Предложение 11.1. *Пусть вдоль кривой $\gamma \subset \Omega$ (т.е. в ограничении на каждое пространство $T_p\gamma$) выполнено равенство*

$$A(x,\, y)dx \;+\; B(x,\, y)dy \;=\; 0. \tag{66}$$

Тогда γ — интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x,\, y)}{B(x,\, y)}. \tag{67}$$

Обратно, если γ — интегральная кривая уравнения (67)*, то вдоль γ выполнено условие* (66)*.*

Доказательство. Вычислим значение формы $Adx + Bdy$ на касательном векторе к кривой γ:

$$(Adx + Bdy)(\dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t)) = A\dot\gamma_1(t) + B\dot\gamma_2(t).$$

Если γ — интегральная кривая уравнения (67), то это выражение равно нулю. Значит, форма $Adx + Bdy$ равна нулю на $T_p\gamma$ (так как пространство $T_p\gamma$ порождено касательным вектором к кривой γ).

Обратно, если форма $Adx + Bdy$ равна нулю на $T_p\gamma$, то она равна нулю на касательном векторе к кривой γ, откуда

$$A\dot\gamma_1(t) + B\dot\gamma_2(t) = 0.$$

Значит,

$$\frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)} = -\frac{A}{B}.$$

Поэтому кривая γ является интегральной для уравнения (67).

□

В дальнейшем мы будем часто писать уравнение $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$ вместо уравнения (67).

11.2. Уравнения в полных дифференциалах и лемма Пуанкаре.

Дифференциальное уравнение $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$ становится очень простым, если оно имеет вид $dF = 0$. Тогда оно называется *уравнением в полных дифференциалах*:

Определение 11.2. Форма ω называется **точной**, если $\omega = dF$ для некоторой функции $F \in C^2(\Omega)$. Эта функция F называется **потенциалом** дифференциальной формы.

Определение 11.3. Уравнение, заданное в виде $\omega = 0$, называется **уравнением в полных дифференциалах**, если форма ω точна.

Для уравнения в полных дифференциалах функция F постоянна вдоль интегральных кривых:

Теорема 11.4. *Пусть дифференциальное уравнение в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задано в виде $\omega = 0$, причём форма ω точна: $\omega = dF$ для некоторой функции $F \in C^1(\Omega)$.*

Тогда функция F постоянна вдоль любой интегральной кривой $(\varphi(t),\, \psi(t))$ этого уравнения: $F(\varphi(t),\, \psi(t)) = const$.

Другими словами, если уравнение имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \tag{68}$$

то функция F постоянна вдоль его интегральных кривых.

С геометрической точки зрения, если функция F постоянна вдоль интегральных кривых уравнения, то интегральные кривые лежат на её линиях уровня. Напомним определение линий уровня:

Определение 11.5. Линия уровня функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — это кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$, на которой значение функции постоянно: $f(x, y) = c$.

Например, для уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ функция x^2+y^2 постоянна вдоль интегральных кривых. Другими словами, интегральные кривые этого уравнения лежат на линиях уровня функции $x^2 + y^2$ — на окружностях (см. рис. 12).

Доказательство. **Первое доказательство**

Для доказательства теоремы достаточно показать, что производная функции $F(\varphi(t),\, \psi(t))$ по t равна нулю. Проверим это:

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t),\, \psi(t)) = \mathcal{L}_{(\dot\varphi,\dot\psi)}F = dF(\dot\varphi, \dot\psi).$$

Мы воспользовались определением производной функции вдоль вектора $\mathcal{L}_v F$ (см. параграф 14). Но наше уравнение имеет вид $dF = 0$, поэтому дифференциал dF равен нулю на касательном векторе $(\dot\varphi, \dot\psi)$ к нашему решению $(\varphi(t),\, \psi(t))$. Итак, $\frac{d}{dt}F(\varphi(t),\, \psi(t)) = 0$, и функция F постоянна вдоль интегральных кривых.

Второе доказательство: доказательство без дифференциальных форм

Так как $(\varphi(t),\, \psi(t))$ — интегральная кривая уравнения (68), имеем

$$\frac{\dot\psi}{\dot\varphi} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{69}$$

Вычислим производную функции $F(\varphi(t),\, \psi(t))$:

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t),\, \psi(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\dot\psi,$$

откуда, пользуясь равенством (69), получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t),\, \psi(t)) = \dot\varphi\Big(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big) = 0.$$

□

Естественно задать следующий вопрос:

Вопрос. *Задана форма $\omega = A(x,\, y)dx + B(x,\, y)dy$ в области Ω (функции A, B мы будем считать непрерывно дифференцируемыми). При каких условиях она является точной, то есть существует функция $F \in C^2(\Omega)$, такая что $\omega = dF$?*

Другими словами, когда существует такая функция F, что $\frac{\partial F}{\partial x} = A(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = B(x, y)$?

Из курса математического анализа известно, что для C^2-гладких функций

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Значит, **необходимым** условием будет условие

$$\frac{\partial}{\partial y} A(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, y). \tag{70}$$

Вопрос. *Является ли условие* (70) *достаточным?*

Оказывается, это сильно зависит от свойств области Ω. Условие (70) будет достаточным, если в области Ω нет «дыр». Мы не будем доказывать этот факт (и не будем объяснять, что такое «дыры»). Вместо этого мы докажем достаточность условия (70) для некоторого специального класса областей без «дыр» — *звёздных* областей. Мы докажем общее утверждение, для формы ω в пространстве любой размерности.

Определение 11.6. Область $\Omega \in \mathbb{R}^m$ называется **звездной**, если для некоторой точки $p \in \Omega$ и для любой другой точки $q \in \Omega$ отрезок $[p,\, q]$ полностью содержится в Ω.

Обобщим условие (70) на многомерный случай:

Определение 11.7. Форма $\omega = F_1 dx_1 + \ldots + F_m dx_m$ называется **замкнутой**, если

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$$

для всех значений k, i.

Замкнутость формы не зависит от выбора координат в пространстве. Мы не будем ни доказывать это утверждение, ни пользоваться им.

Для двумерного случая мы уже объяснили, что точная форма обязательно является замкнутой. Общий случай ничем не отличается от двумерного:

Лемма 11.8. *Точная дифференциальная 1-форма является замкнутой.*

Лемма (Пуанкаре)**.** *В звездной области любая замкнутая дифференциальная 1-форма точна.*

В частности, необходимое условие (70) является достаточным для звездных областей на плоскости.

Для доказательства леммы Пуанкаре мы должны научиться по дифференциальной форме dF восстанавливать функцию F. Необходимую технику мы разработаем в следующем разделе.

11.3. Интегрирование дифференциальных форм.

Дифференциальные 1-формы можно интегрировать по кривым в области Ω. В частности, интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ можно считать интегралом от 1-формы $f(x)dx$ по отрезку прямой.

Определение 11.9. Интеграл от дифференциальной 1-формы ω в $\mathbb{R}^m$ по гладкой кривой $\gamma, \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ — это

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 \omega(\dot\gamma(t))dt,$$

где $\omega(\dot\gamma(t))$ — это значение дифференциальной формы ω на векторе $\dot\gamma(t)$, касательном к кривой γ.

Эту же формулу можно записать в координатах: если

$$\omega = F_1(x_1,\ldots,x_m)dx_1 + \ldots + F_m(x_1,\ldots,x_m)dx_m,$$

$$\gamma = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t)),$$

то

$$\int_\gamma (F_1dx_1 + \ldots + F_mdx_m) = \int_0^1 (F_1\dot\gamma_1 + \ldots + F_m\dot\gamma_m)dt.$$

Заметим, что для случая $n = 1$ и для кривой $\gamma(t) = t, t \in [0,1]$, (т.е. для кривой, совпадающей с отрезком $[0,1]$) так определённый интеграл совпадает с обычным интегралом Римана: $\int_\gamma f(x)dx = \int_0^1 f(t)\cdot 1dt$. Поэтому путаницы с обозначениями не возникает. Ниже мы докажем обобщение теоремы о замене переменной в определённом интеграле.

Предложение 11.10. *Интеграл от дифференциальной формы не зависит от параметризации кривой (см. определение 14.1 — определение кривой). Другими словами, для любого диффеоморфизма $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$, $t = \phi(\tau)$, интеграл от любой дифференциальной формы по кривой γ совпадает с её интегралом по кривой $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\phi(\tau))$.*

Доказательство. Интеграл по кривой $\tilde{\gamma}$ от дифференциальной формы ω равен

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_0^1 (F_1 \dot{\gamma}_1 \frac{d\phi}{d\tau} + \ldots + F_m \dot{\gamma}_m \frac{d\phi}{d\tau}) d\tau.$$

Выполним замену переменной в интеграле, перейдя к переменной $t = \phi(\tau)$. Получим

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_0^1 (F_1 \dot{\gamma}_1 + \ldots + F_m \dot{\gamma}_m) dt = \int_{\gamma} \omega,$$

что и требовалось. □

11.4. Еще одно обоснование метода разделения переменных. Если записывать дифференциальные уравнения с помощью дифференциальных форм, можно дать еще одно обоснование методу разделения переменных. Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$. С помощью дифференциальных форм его можно записать следующим образом:

$$\omega := g(y)dy - h(x)dx = 0$$

Проинтегрируем дифференциальную форму ω вдоль интегральной кривой нашего уравнения $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Этот интеграл будет равен нулю, так как значение $\omega(\dot{\gamma})$ равно нулю (по определению решения дифференциального уравнения, записанного в форме $\omega = 0$; см. предложение 11.1). Значит,

$$\int_{\gamma} h(x)dx = \int_{\gamma} g(y)dy.$$

Параметризуем кривую γ параметром $x, x \in [x(t_1), x(t_2)]$ (другими словами, представим её в виде графика отображения

$y(x)$). Тогда её касательный вектор будет равен $(1, \frac{dy}{dx})$. Но значение дифференциальной формы $h(x)dx$ на этом векторе равно $h(x)$. Значит,

$$\int_\gamma h(x)dx = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} h(x)dx.$$

Аналогичным образом, параметризовав кривую параметром y, можно доказать, что $\int_\gamma g(y)dy = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} g(y)dy$ Итак,

$$\int h(x)dx = \int g(y)dy,$$

как мы и утверждали в методе разделения переменных.

11.5. Доказательство леммы Пуанкаре.

Доказательство. Будем считать, что точка p находится в начале координат. Из курса математического анализа известно, что для любой гладкой функции Φ

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi(tx_1, \ldots, tx_m)dt = \\ = \int_0^1 \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \ldots + x_m \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \right) dt.$$

Для функции F нам известны все её частные производные. Поэтому естественно определить функцию F таким образом:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = \int_0^1 \left(x_1 F_1(t\overrightarrow{x}) + \ldots + x_m F_m(t\overrightarrow{x}) \right) dt,$$

где $\vec{x} = (x_1 \ldots x_m)$. Нам нужно проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_s} = F_s$. Вычислим $\frac{\partial F}{\partial x_s}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s}(x_1 F_1 + \ldots + x_m F_m)dt = \\ = \int_0^1 \left(tx_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_s} + \ldots + tx_m \frac{\partial F_m}{\partial x_s} + F_s \right) dt = \\ = \int_0^1 \left(tx_1 \frac{\partial F_s}{\partial x_1} + \ldots + tx_m \frac{\partial F_s}{\partial x_m} + F_s \right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_s)dt = F_s.$$

Итак, $dF = F_1 dx_1 + \ldots F_m dx_m = \omega$.

□

11.6. Пример замкнутой, но не точной дифференциальной формы. Напоследок приведём пример замкнутой, но не точной формы в области с «дырами».

Пример 11.11. *Рассмотрим функцию «полярный угол» на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Обозначим эту функцию символом φ. Функция φ многозначна: её значение определено с точностью до прибавления $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Но в любом диске, не содержащем нуля, функция φ представляет собой счётное число однозначных функций φ_k, отличающихся друг от друга прибавлением $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = d\varphi$. Более формально, в каждом диске, не содержащем нуля, мы положим $\omega = d\varphi_k$; это определение не зависит от выбора k, так как функции φ_k отличаются друг от друга на константу, и $d\varphi_n = d\varphi_m$ для любых n, m. По определению, форма $d\varphi$ точна в любом диске, не содержащем нуля (она является дифференциалом функции φ_k). Следовательно, форма $d\varphi$ замкнута в любом диске, не содержащем нуля; значит, замкнута во всём множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Докажем, что форма $d\varphi$ не точна в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Действительно, если $d\varphi = dF$ для некоторой функции F, то в любом диске, не содержащем нуля, $F = \varphi_k + C$, то есть функция F отличается от полярного угла на константу. Но такой однозначной функции на проколотой плоскости не существует.

Упражнение 30. *Докажите, что форма $\omega = d\varphi$ равна*

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

12. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель

12.1. Решение уравнений в полных дифференциалах. Рассмотрим уравнение вида $\omega = 0$, где ω — дифференци-

альная 1-форма (см. параграф 11). Может оказаться, что форма ω точна, $\omega = dF$; тогда, как было показано в теореме 11.4, функция F постоянна вдоль интегральных кривых нашего уравнения. Тем самым, мы нашли интегральные кривые уравнения.

Определение 12.1. Уравнение, заданное в виде $\omega = 0$, называется **уравнением в полных дифференциалах**, если форма ω точна: $\omega = dF$ для некоторой функции F.

Как проверить, что форма ω точна, и как найти функцию F? Для этого нужно проверить, что форма ω замкнута; если область определения формы ω звездная, можно применить лемму Пуанкаре и доказать, что форма ω точна. Если область определения формы не звёздная, её можно разбить на несколько звёздных областей и рассмотреть каждую область по отдельности. Построение функции F, для которой $\omega = dF$, содержится в доказательстве леммы Пуанкаре.

Упражнение 31. *Докажите, что следующие уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, решите их и нарисуйте их интегральные кривые:*

1. $xdx + ydy = 0$;
2. $ydx + xdy = 0$;
3. $-2xdx + (2y + 3y^2)dy = 0$.

Упражнение 32. *Выясните, в каких областях следующее уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решите его.*

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

Указание Ср. с формой из примера 11.11.

12.2. Интегрирующий множитель.

Уравнение, заданное в виде $\omega = 0$, где ω — дифференциальная 1-форма, может не быть уравнением в полных дифференциалах (например, когда форма ω не замкнута). Но в большинстве случаев форму ω можно домножить на некоторую функцию f и сделать замкнутой. Такая функция f называется *интегрирующим множителем* для уравнения $\omega = 0$. Уравнение $f \cdot \omega = 0$ уже задаётся замкнутой дифференциальной формой, и

его можно решить методами предыдущего раздела. В тех точках, где $f \neq 0$, оно равносильно исходному уравнению.

Заметим, что подобрать интегрирующий множитель бывает очень сложно; общего метода его вычисления не существует. Позже (см. теорему о выпрямлении) мы увидим, что в окрестности большинства точек интегрирующий множитель существует.

В следующих двух разделах мы рассмотрим два примера уравнений, для которых легко подобрать интегрирующий множитель.

12.3. Уравнение Бернулли (частный случай). Напомним, что уравнение Бернулли — это дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)y^n. \tag{71}$$

Идея решения уравнения Бернулли описана в примере 9.4. Мы рассмотрим простой частный случай уравнения Бернулли: $g(x) \equiv 0, f(x) = \frac{1}{ax}$, где $a > 0$. В этом случае уравнение можно записать следующим образом:

$$ax\,dy - y\,dx = 0, \tag{72}$$

или $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ (последнее уравнение нужно рассматривать в смысле определения 4.5).

Умножим обе части уравнения (72) на интегрирующий множитель $\frac{y^{a-1}}{x^2}$. Мы получим уравнение

$$\frac{ay^{a-1}}{x}dy - \frac{y^a}{x^2}dx = 0,$$

откуда $d\left(\frac{y^a}{x}\right) = 0$. Значит, для любого решения $y(x)$ уравнения (72) выполнено $\left(\frac{y^a}{x}\right) = const$. Таким образом, интегральные кривые — это кривые $y^a = Kx$ (см. рис. 32).

Упражнение 33. *Строго говоря, такое рассуждение работает только при $y > 0$ (иначе число y^a может не быть вещественным). Как выглядит уравнение интегральных кривых в области $y < 0$?*

Примечание 12.2. *Внимательный читатель может заметить, что уравнение* (72) *однородно, поэтому его можно решить методами раздела 10.1.*

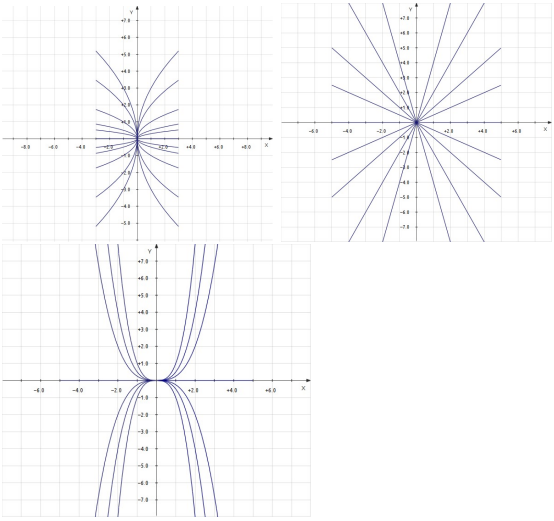

Рис. 32. Интегральные кривые уравнения (72) для $a = 2, a = 1, a = \frac{1}{3}$

12.4. Система Лотки—Вольтерры. Система уравнений Лотки—Вольтерры возникает как простейшая модель системы «хищник – жертва» в живой природе. Пусть у нас есть всего два вида живых существ: «хищники» питаются «жертвами», и больше размножение «жертв» ничем не ограничено.

Если бы хищников не было, скорость размножения жертв была бы пропорциональна их количеству. Количество жертв x подчинялось бы уравнению деления бактерий (см. параграф 2):

$$\dot{x} = Ax, \quad A > 0.$$

Если бы жертв не было, хищники умирали бы от голода. Пусть хищники вымирают от голода экспоненциально быстро:

$$\dot{y} = -Cy, \quad C > 0.$$

Теперь в правые части этих уравнений нужно добавить слагаемые, которые учитывают поедание жертв хищниками. Выберем такие слагаемые:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy, \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \tag{73}$$

где $B, D > 0$ (система уравнений Лотки—Вольтерры). Мы считаем, что количество встреч хищников с жертвами пропорционально xy, и каждая такая встреча с некоторой вероятностью заканчивается гибелью жертвы. Кроме того, мы считаем, что рождаемость у хищников линейно зависит от количества съеденных жертв.

Найдем фазовые кривые этой системы в положительном квадранте $x > 0, y > 0$ (понятно, что количество хищников и жертв всегда положительно). Напомним, что в указании к упражнению 15 предлагается находить фазовые кривые этой системы, переходя к интегральным кривым уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Cy + Dxy}{Ax - Bxy} = \frac{-\frac{C}{x} + D}{\frac{A}{y} - B}$$

с помощью теоремы 7.2, а затем применяя метод разделения переменных. Ниже мы найдём фазовые кривые с помощью метода интегрирующего множителя.

Запишем уравнение в виде

$$(Ax - Bxy)\,dy + (Cy - Dxy)\,dx = 0$$

Разделим это уравнение на xy (в данном случае $1/(xy)$ — интегрирующий множитель):

$$\left(\frac{A}{y} - B\right) dy + \left(\frac{C}{x} - D\right) dx = 0$$

откуда

$$d\left(A \ln|y| - By + C \ln|x| - Dx\right) = 0$$

Значит, в области $x > 0,\ y > 0$ фазовые кривые заданы уравнением

$$y^A e^{-By} x^C e^{-Dy} = k. \tag{74}$$

(см. рис. 33).

Мы видим, что все фазовые кривые системы замкнуты (это легко доказать с помощью уравнения (74). Сделайте это!). Циклы, которые мы видим на рис. 33, наблюдаются в природе. Их можно описать следующим образом: когда количество хищников возрастает, они истребляют жертв и количество жертв убывает. Когда жертв становится слишком мало, их начинает не

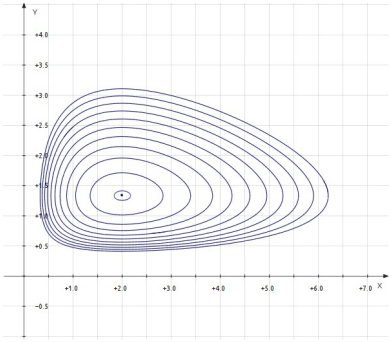

Рис. 33. Фазовые кривые уравнения Лотки—Вольтерры для $A = 4$, $B = 3$, $C = 2$, $D = 1$.

хватать для пропитания хищников, и количество хищников начинает убывать. Когда хищников становится достаточно мало, они начинают поедать меньшее количество жертв и количество жертв начинает возрастать. Количество пищи для хищников увеличивается, и хищники размножаются. Цикл замыкается, и все начинается сначала.

Таким образом, система «хищник – жертва» стабильна: не происходит ни неограниченного роста количества животных, ни полного вымирания. При этом количество хищников и жертв колеблется около некоторого *положения равновесия*, которое зависит только от чисел A, B, C, D.

Положение равновесия (x_0, y_0)— это постоянное решение системы уравнений: другими словами, решением уравнения являются функции $x \equiv x_0, y \equiv y_0$. Соответствующая фазовая кривая состоит из одной точки (см. рис. 33). Найдём значения x_0, y_0. Поскольку $x \equiv x_0, y \equiv y_0$ — решение уравнения, то

$$\begin{cases} Ax_0 - Bx_0y_0 = 0, \\ -Cy_0 + Dx_0y_0 = 0, \end{cases}$$

откуда легко найти значения x_0 и y_0:

$$x_0 = C/D, y_0 = A/B.$$

При изучении систем «хищник – жертва» важно знать, каким будет среднее количество животных на данной территории.

Вычислим среднее значение количества хищников и жертв для произвольной фазовой кривой в положительном квадранте.

Определение 12.3. Среднее значение периодической функции f за период — это значение

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{75}$$

где T — длина периода: $f(t+T) = f(t)$ для произвольного t.

Заметим, что мы не знаем ни функций $x(t)$ и $y(t)$, ни длину периода T для этих функций. Поэтому мы не можем просто вычислить интеграл (75) для функций $x(t)$ и $y(t)$. Тем не менее, этот интеграл удаётся найти с помощью следующего приёма.

Разделим первое уравнение системы (73) на x и проинтегрируем левую и правую часть по отрезку $t \in [0, T]$:

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t)dt}{x(t)} = \int_0^T (A - By(t))dt$$

Левая часть после перехода к переменной x превращается в

$$\int_{x(0)}^{x(T)} \frac{dx}{x} = \ln x(T) - \ln x(0) = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что функция $x(t)$ периодична с периодом T. Значит,

$$0 = \int_0^T (A - By(t))dt = AT - B\int_0^T y(t)dt,$$

откуда $\bar{y} = A/B$. Аналогичным образом из второго уравнения системы Лотки—Вольтерры мы получаем, что $\bar{x} = C/D$.

Итак, среднее значение количества хищников и количества жертв за период не зависит от начальных условий и равно равновесному количеству $x_0 = C/D, y_0 = A/B$.

Влияние войны на коэффициенты популяции

Во время Первой мировой войны объём отлова рыбы на Адриатике резко уменьшился. В результате в уловах возросла доля хищной рыбы. То есть оказалось, что при уменьшении вылова

рыбы отношение среднего количества хищников к среднему количеству жертв возрастает.

Чтобы объяснить это явление, Вито Вольтерра в 1925 году и предложил модель системы «хищник – жертва», которую мы только что рассмотрели. Пусть в Адриатике только два вида рыбы: «хищники» и «жертвы». Будем считать, что количество выловленной рыбы пропорционально общему количеству рыбы этого вида. Наше уравнение примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - a)x - Bxy, \\ \dot{y} = (-C - c)y + Dxy. \end{cases} \tag{76}$$

где a, c — отношение количества выловленных хищников (соотв., жертв) к общему количеству хищников (соотв., жертв). В такой системе среднее количество жертв равно $(C + c)/D$, а среднее количество хищников — $(A - a)/B$. Во время войны константы a и c уменьшаются, так как уменьшается вылов рыбы. Значит, среднее количество жертв становится равно $(C + c - \varepsilon_1)/D$ (уменьшается), а среднее значение количества хищников становится равно $(A - a + \varepsilon_2)/B$ (увеличивается). Таким образом, модель Лотки—Вольтерры объясняет увеличение количества хищных рыб во время войны.

13. Первые интегралы и уравнения Ньютона на прямой

В предыдущем параграфе мы, пользуясь теоремой 11.4, находили функции, постоянные вдоль интегральных кривых дифференциального уравнения на плоскости. Такие функции называются *первыми интегралами*. В этом параграфе мы обсудим понятие первого интеграла в более общем случае.

Определение 13.1. Функция на пространстве $\Omega \times \mathbb{R}$, постоянная вдоль интегральных кривых неавтономного уравнения в области Ω, называется **первым интегралом** уравнения.

Пример 13.2. *Потенциал F точной формы $\omega = dF$ является первым интегралом уравнения $\omega = 0$.*

Если речь идет об автономном уравнении (возможно, в многомерном пространстве), то естественно дать такое определение:

Определение 13.3. Функция F, постоянная вдоль фазовых кривых $\phi(t)$ автономного уравнения ($F(\phi(t)) = const$), называется **первым интегралом** этого уравнения.

При решении уравнения бывает полезно сначала найти первый интеграл этого уравнения. Казалось бы, для того, чтобы выяснить, будет ли функция F первым интегралом, нужно сначала найти фазовые (в неавтономном случае — интегральные) кривые уравнения. А если мы уже нашли фазовые кривые, то решить уравнение можно без всяких первых интегралов. Как же может получиться, что мы нашли первый интеграл, не решая уравнения?

Конечно, *угадать* первый интеграл уравнения довольно сложно. Однако *проверить*, что мы угадали его правильно — совсем просто, и для этого не нужно решать уравнение.

Пусть $\gamma(t)$ — фазовая кривая. Функция F постоянна вдоль неё тогда и только тогда, когда производная от функции $F(\gamma(t))$ по t равна нулю. Эту производную можно вычислить как производную от сложной функции, и она будет зависеть не от самой кривой γ, а от касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ к кривой γ. Но γ — интегральная кривая нашего уравнения, поэтому этот вектор нам известен: он равен $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$.

Эти соображения позволяют доказать следующее предложение.

Предложение 13.4 (Критерий первого интеграла)**.** *Пусть $v(x)$ — векторное поле в некоторой области Ω. Пусть функция $F \in C^1(\Omega)$ определена в Ω, и в каждой точке $x \in \Omega$ её производная вдоль вектора $v(x)$ равна нулю: $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$. Тогда функция F является первым интегралом уравнения $\dot{x} = v(x)$. Если через каждую точку области Ω проходит фазовая кривая векторного поля v, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — решение уравнения (фазовая кривая векторного поля v). Вычислим производную $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))$:

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \mathcal{L}_{\dot{\gamma}(t)}F = \mathcal{L}_{v(x)}F \tag{77}$$

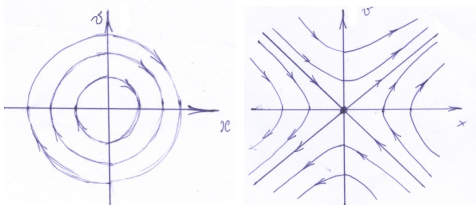

Рис. 34. У этих уравнений есть первые интегралы

по альтернативному определению производной вдоль вектора (см. параграф 14). Значит, если $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$ в любой точке x, то функция F постоянна вдоль фазовых кривых.

Наоборот, пусть функция F постоянна вдоль фазовых кривых уравнения. Проведём фазовую кривую через точку x. Из равенства (77) следует, что $\mathcal{L}_{v(x)}F = 0$.

Вместо того, чтобы использовать альтернативное определение производной вдоль вектора, мы могли просто вычислить производную $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))$ как производную сложной функции:

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{d\gamma_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{d\gamma_n}{dt} = dF(\dot\gamma) = \mathcal{L}_{\dot\gamma}F$$

и получить тот же самый результат (ср. со вторым доказательством теоремы 11.4).

□

Упражнение 34. *Найдите полную энергию для уравнений Ньютона $\ddot x = -x$ и $\ddot x = x$ методами раздела 1.2 (для уравнения $\ddot x = -x$ мы уже делали это в разделе 1.3) и проверьте по критерию 13.4, что эти функции действительно являются первыми интегралами. (см. рис. 34)*

Упражнение 35. *Докажите, что у систем уравнений*

$$\begin{cases} \dot x = x \\ \dot y = y \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x - y \end{cases}$$

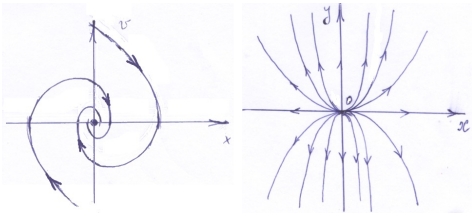

Рис. 35. У этих уравнений нет первых интегралов

фазовые портреты которых изображены на рисунке 35, не может быть первых интегралов.

Примечание 13.5. *Знание первого интеграла позволяет сократить число переменных на единицу. Если* Φ *— первый интеграл системы в* n*-мерном пространстве, то каждая интегральная кривая уравнения содержится в множестве* $\Phi(x) = const$*, которое обычно представляет собой* $(n-1)$*-мерную поверхность. Поэтому достаточно решить уравнение на каждой* $(n-1)$*-мерной поверхности.*

13.1. Уравнения Гамильтона. В механике при изучении движения систем материальных точек часто возникают уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{p} = & -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = & \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

где $(p,\, q) \in \mathbb{R}^2$, $H(p,\, q) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Например, p — координата точки, q — её скорость. Функцию H называют гамильтонианом.

Функция H — первый интеграл нашей системы уравнений:

$$\mathcal{L}_{v(x)} H = \langle \operatorname{grad} H, (H_q, -H_p) \rangle = \langle (H_p, H_q), (H_q, -H_p) \rangle = 0.$$

Этот первый интеграл называют интегралом энергии.

В многомерном случае система уравнений Гамильтона имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \tag{78}$$

где $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, H — функция $2n$ переменных $H(\vec{p}, \vec{q}) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$.

Предложение 13.6. *Функция H — первый интеграл системы* (78).

Доказательство. Доказательство в точности такое же, как и для случая $n = 1$:

$$\mathcal{L}_{v(x)} H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

□

13.2. Уравнения Ньютона. Напомним, что в разделе 1.2 мы уже рассматривали уравнение Ньютона для движения точки на прямой. Чтобы решить уравнение, мы домножали его левую и правую часть на $\dot{x}$. Сейчас мы приведем более естественный способ решения уравнения Ньютона.

Напомним постановку задачи.

Пусть материальная точка движется под действием внешней силы F, причем эта сила зависит только от положения точки. Движение точки определяется вторым законом Ньютона

$$ma = F(x),$$

или, в наших обычных обозначениях,

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Введём новую переменную y — скорость материальной точки. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \dfrac{1}{m} F(x) \end{cases}$$

Перейдем, как мы делали в разделе 7.1 (теорема 7.2), от фазовых кривых этого уравнения к интегральным кривым уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{my}.$$

Запишем это уравнение в виде $mydy - F(x)dx = 0$. Дифференциальная форма $\omega = mydy - F(x)dx$ на прямой точна. Чтобы убедиться в этом, можно проверить замкнутость этой формы и воспользоваться теоремой Пуанкаре, но мы поступим проще. Возьмем функцию U — первообразную для функции $(-F)$: $\frac{dU}{dx} = -F(x)$. Тогда $\omega = d(\frac{my^2}{2} + U(x))$, т.е. форма ω точна. Отсюда (в силу теоремы 11.4) мы получаем закон сохранения энергии $\frac{my^2}{2} + U(x) = const = E$.

В следующих разделах мы рассмотрим несколько примеров уравнений Ньютона.

13.3. Физический маятник. Этот пример мы уже изучали в пункте 1.3.1. Сейчас мы разберём его гораздо более подробно.

Рассмотрим пружину, один из концов которой закреплен, а на другом висит грузик (см. рис. 3–4). да кроме силы со стороны пружины).

Пусть пружина и грузик расположены на некоторой прямой. В качестве начала отсчета на прямой мы выберем то положение грузика, при котором пружина не растянута. Допустим, коэффициент жесткости пружины равен $k = 1$, а масса грузика равна $m = 1$. Тогда, по закону Гука, $F = -kx$, и по второму закону Ньютона

$$\ddot{x} = -x.$$

Введём новую переменную $y = \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Нарисуем соответствующее векторное поле (см. рис 5). Видно, что оно касается любой окружности с центром в точке 0.

Значит, $x^2 + y^2$ — первый интеграл системы. Этот результат можно проверить и непосредственно: $\mathcal{L}_{v(x)}(x^2 + y^2) = \langle (2x, 2y), (y, -x) \rangle = 0$.

Таким образом, фазовые кривые $(x(t), y(t))$ — это окружности с центром в нуле.

Но мы пока не знаем решений системы — самих функций $x(t)$ и $y(t)$). Другими словами, мы не знаем, как движется точка $(x(t), y(t))$ по окружности $x^2 + y^2 = 2E$.

Напомним, что y — скорость грузика. Когда она положительна ($y > 0$), значение x должно расти вдоль фазовых кривых, а когда отрицательна — убывать. Другими словами, в верхней полуплоскости движение происходит слева направо, а в нижней — справа налево. Значит, вдоль окружности точка $(x(t), y(t))$ движется по часовой стрелке. Поэтому на рис. 5 стрелки на фазовых кривых расставлены правильно.

13.3.1. Решение из геометрических соображений. Заметим, что длины всех векторов, касающихся окружности $x^2 + y^2 = 2E$, одинаковы и равны $\sqrt{2E}$. Поэтому движение по окружности $x^2 + y^2 = 2E$ происходит с постоянной скоростью $\sqrt{2E}$. Так как длина окружности равна $2\pi\sqrt{2E}$, то угловая скорость движения равна 1. Значит, если движение началось в точке $(x_0, y_0) = \sqrt{2E}(\cos\phi, \sin\phi)$, то в момент времени t мы окажемся в точке $(x(t), y(t)) = \sqrt{2E}(\cos(t+\phi), \sin(t+\phi))$.

Если теперь применить формулы для косинуса и синуса суммы, мы получим

$$(x(t),\, y(t)) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t,\, -x_0 \sin t + y_0 \cos t). \tag{79}$$

Можно и обойтись без применения формул для косинуса и синуса суммы. Раз угловая скорость движения по окружности равна 1, то точка $(x(t), y(t))$ получается из точки (x_0, y_0) поворотом на угол t. Матрица такого поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Применяя эту матрицу к вектору (x_0, y_0), мы получаем формулу (79).

13.3.2. Решение с помощью первого интеграла. Для точки на окружности $y = \pm\sqrt{2E - x^2}$. В полуплоскости $y > 0$ получаем

$$\dot{x} = \sqrt{2E - x^2}.$$

Применим метод разделения переменных:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\zeta}{\sqrt{2E - \zeta^2}}$$

Отсюда

$$t - t_0 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{2E}}$$

и

$$x(t) = \sqrt{2E} \sin(t - t_0 + \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{2E}}).$$

Перепишем это равенство в более удобном виде, пользуясь формулой синуса суммы:

$$x(t) = \sqrt{2E} \cos(t - t_0) \frac{x_0}{\sqrt{2E}} + \sqrt{2E} \sin(t - t_0) \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{2E}} =$$
$$= x_0 \cos(t - t_0) + \dot{x}(0) \sin(t - t_0).$$

У нас получилось то же решение, что и в предыдущем пункте.

Упражнение 36. *Доведите это рассуждение до конца, рассмотрев движение в полуплоскости $y < 0$.*

Итак, мы видим, что физический маятник движется периодически. Период его колебаний равен 2π и не зависит от амплитуды колебаний.

Метод, которым мы действовали в этом пункте, можно применять к уравнениям Ньютона произвольного вида: из закона сохранения энергии получается уравнение вида

$$\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))},$$

которое можно решить методом разделения переменных:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E - U(\zeta))}}.$$

13.4. Модифицированный физический маятник. Если не предполагать, что масса грузика равна 1 и $k = 1$, второй закон Ньютона для физического маятника примет вид

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{80}$$

Здесь $\omega^2 = k/m$. Изменим единицы измерения времени: введем переменную $\tau = \omega t$. Тогда $\frac{d^2x}{d\tau^2} = -x$. Мы свели задачу к предыдущей. Итак, решение имеет вид

$$x = A \cos \tau + B \sin \tau = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

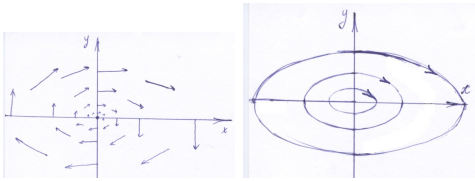

Рис. 36. Векторное поле и фазовый портрет модифицированного физического маятника

Фазовый портрет уравнения (80) состоит из эллипсов $y^2 + \omega^2 x^2 = 2E$ (см. рис. 36). Действительно, при изменении единиц измерения времени скорость меняется в ω раз, и эллипсы переходят в окружности.

Итак, период колебаний равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

13.5. Математический маятник. Пусть грузик массы m висит на нерастяжимом, несжимаемом и невесомом стержне длины l в поле силы тяжести (см. рис. 37). Второй конец стержня закреплен неподвижно в точке O. Грузик может двигаться только в одной плоскости. Такая система называется математическим маятником. Примером математического маятника можно считать качели.

В качестве координаты x возьмём угол между направлением стержня и вертикалью.

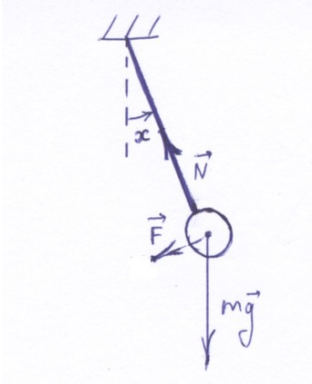

Рис. 37. Математический маятник

На грузик действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{N} = (N_1, N_2)$ со стороны стержня. Их равнодействующая F направлена по касательной к окружности с центром O радиусом l. Значит, величина равнодействующей равна $mg \sin x$.

Величина ускорения точки равна $l\ddot{x}$: ускорение точки, движущейся по окружности, равно радиусу окружности, умноженному на угловое ускорение.

Итак, по второму закону Ньютона,

$$m\ddot{x} = -m\frac{g}{l}\sin x.$$

Будем считать, что $g = l = 1$ (можно выбрать такие единицы измерения времени и расстояния, чтобы это было выполнено). Уравнение примет вид

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \tag{81}$$

По закону сохранения энергии, величина $\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = E$ постоянна. Этот результат можно получить двумя способами.

Во-первых, можно построить первый интеграл уравнения (81), как мы делали в разделе 13.2. В данном случае $U(x) = \int \sin x dx = -\cos x$.

Во-вторых, можно вспомнить закон сохранения энергии из курса физики. Кинетическая энергия грузика в данном случае равна $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, а потенциальная энергия равна mgh, где $h = -\cos x$ — высота, на которой расположен грузик. По закону сохранения механической энергии, выражение $\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x$ должно быть первым интегралом уравнения (81). Этот факт можно затем проверить по критерию первого интеграла (см. предложение 13.4), не ссылаясь на закон сохранения полной механической энергии.

На рисунке 38 изображены линии уровня первого интеграла — кривые $y = \pm\sqrt{C + 2\cos x}$. Мы знаем, что они содержат фазовые кривые математического маятника.

Рисунок периодичен (не меняется при сдвиге на 2π по горизонтали). Дело в том, что координата x — это угол между стержнем и вертикалью, значит, она определена с точностью до прибавления 2π. Строго говоря, множество значений координаты x образует окружность, поэтому картинку правильнее было бы рисовать на бесконечном цилиндре $x \in S^1, y \in \mathbb{R}$.

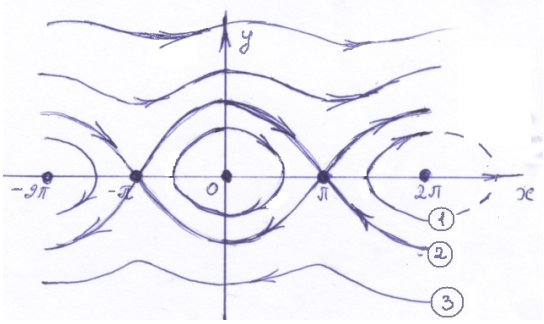

Рис. 38. Фазовые кривые математического маятника

На рисунке жирным отмечены положения равновесия $(k\pi, 0)$, в которых векторное поле равно нулю. Если в начальный момент маятник оказался в положении равновесия, то он будет находиться в нём бесконечно долго. Точки $(2\pi n, 0)$ соответствуют нижнему положению равновесия, а $((2n+1)\pi, 0)$ — верхнему.

Каждая линия уровня, на которой $C \neq 2$, совпадает с фазовой кривой. При $C < 2$ линия уровня замкнута, и маятник раскачивается около нижнего положения равновесия (такая фазовая кривая отмечена на рисунке цифрой ①). При $C > 2$ маятник делает бесконечно много оборотов (качели делают «солнышко»). На рисунке такая фазовая кривая отмечена цифрой ③.

Цифрой ② на рисунке отмечена линия уровня $y = \pm\sqrt{2 + 2\cos x}$, на которой $C = 2$. Она является объединением бесконечного количества фазовых кривых: положений равновесия $x = k\pi, y = 0$ и дуг между положениями равновесия. Каждая дуга соответствует движению, при котором грузик бесконечно долго приближается к верхнему положению равновесия (и в далёком прошлом находился сколь угодно близко к верхнему положению равновесия). Такие фазовые кривые невозможно пронаблюдать как движения математического маятника из-за наличия трения. Но они играют особую роль, так как разделяют области фазового пространства с разным поведением фазовых кривых. Такие кривые называются сепаратрисами.

Изучим поведение фазовых кривых в окрестности положе-

ний равновесия. Начнем с нижнего положения равновесия.

Вблизи нижнего положения равновесия фазовые кривые замкнуты, и картинка напоминает картинку для физического маятника. Дадим неформальное объяснение этого сходства. Запишем уравнение в виде $\ddot{x} = -\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \dots$. Грубо говоря, это уравнение «в первом приближении» совпадает с уравнением для физического маятника $\ddot{x} = -x$, поэтому их фазовые портреты должны быть похожи. В следующем разделе мы формализуем это рассуждение, чтобы изучить колебания математического маятника вблизи нижнего положения равновесия (но результат мы получим в общей ситуации).

Примечание 13.7 (Предупреждение)**.** *Такой метод — заменить уравнение вблизи положения равновесия на близкое уравнение — работает не всегда. Например, фазовый портрет уравнения*

$$\ddot{x} = -x + v^3$$

(здесь $v = \dot{x}$ — скорость) совсем не похож на фазовый портрет физического маятника (проверьте это!).

Тем не менее, такой метод можно применять в окрестностях положений равновесия для нашей системы. Применим его и для верхнего положения равновесия $(x, v) = (\pi, 0)$. Уравнение $\ddot{x} = -\sin x$ в окрестности точки π можно записать так: обозначив $y := x - \pi$, получим

$$\ddot{y} = -\sin(y + \pi) = \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

то есть в первом приближении уравнение совпадает с уравнением $\ddot{y} = y$. Фазовый портрет этого уравнения («седло») изображен на рис. 40. Видно, что он похож на фазовый портрет математического маятника в окрестности точки $(\pi, 0)$; в частности, сепаратрисы имеют такой же угол наклона.

13.6. Малые колебания. Вернемся к уравнению Ньютона в его общем виде.

Предложение 13.8. *Пусть U — потенциал уравнения Ньютона*

$$\ddot{x} = F(x)$$

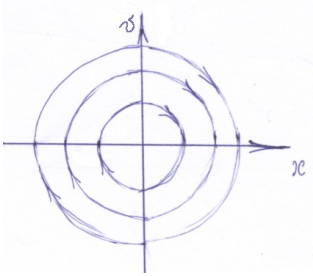

Рис. 39. Фазовый портрет в окрестности нижнего положения равновесия математического маятника (центр)

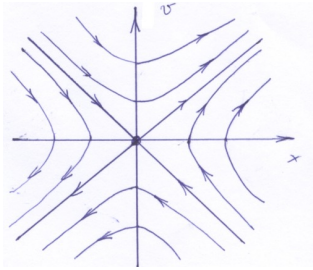

Рис. 40. Фазовый портрет в окрестности верхнего положения равновесия математического маятника (седло)

($m = 1$), то есть $\frac{dU}{dx} = -F(x)$. Пусть функция U имеет локальный минимум в нуле:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0,$$

причем вторая производная функции U в нуле положительна:

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} =: \omega^2 > 0$$

Тогда в окрестности нуля решения уравнения ведут себя так же, как и для модифицированного физического маятника (см. раздел 13.4). Более точно,

1) *При достаточно малых значениях ε_1, ε_2 решение уравнения $\ddot{x} = F(x)$ с начальным условием $x(t_0) = \varepsilon_1$, $\dot{x}(t_0) = \varepsilon_2$ периодично.*

2) *Пусть $T_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2}$ — период этого решения. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2 \to 0} T_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Доказательство. Для начала, как и в разделе 13.4, заменой $\tau = \omega t$ сведём задачу к случаю $\omega = 1$. Для простоты будем считать, что $U(0) = 0$: если это не так, мы можем прибавить константу к функции U.

Докажем, что фазовая кривая, которая начинается вблизи точки 0, не уходит далеко от нуля в смысле следующего определения.

Определение 13.9. Неподвижная точка p (то есть точка, где $v(p) = 0$) называется **устойчивой по Ляпунову**, если для любой её окрестности W можно выбрать некоторую меньшую окрестность $p \in V$, что если фазовая кривая началась в окрестности V, она никогда (ни в прошлом, ни в будущем) не покидает окрестность W.

Упражнение 37. *Зачем в этом определении сказано, что точка p неподвижна? Может ли такое условие быть выполнено для точки p, где $v(p) \neq 0$?*

Ниже мы докажем, что точка 0 устойчива по Ляпунову.

Напомним, что функция $U(x)$ имеет локальный минимум в точке 0, и $U(0) = 0$. Выберем величину ε, для которой ограничение $U(x)|_{|x|<\varepsilon}$ имеет глобальный минимум в точке 0. Другими словами, значения функции $U(x)|_{|x|<\varepsilon}$ неотрицательны. Положим $a := \min U(\pm\varepsilon)$.

Лемма 13.10. *Если фазовая кривая началась в точке (x_0, y_0), настолько близкой к нулю, что $(|x_0| < \varepsilon)$ и $(\frac{y_0^2}{2} + U(x_0) = E < a)$, эта кривая никогда не покинет прямоугольник $\{(x, y) \mid |x| < \varepsilon, \frac{y^2}{2} < 2E + \frac{U(x_0)}{2}\}$.*

Доказательство леммы. Предположим, что фазовая кривая пересекает границу прямоугольника $\{(x, y) \mid |x| < \varepsilon, \frac{y^2}{2} < 2E + \frac{U(x_0)}{2}\}$ в некоторой точке (x, y). Рассмотрим два случая.

Во-первых, точка (x, y) может лежать на одном из горизонтальных отрезков $\frac{y^2}{2} = 2E + \frac{U(x_0)}{2}$. В этом случае $\frac{y^2}{2} + U(x) \geqslant \frac{y^2}{2} + U(0) = \frac{y^2}{2} = 2E + \frac{U(x_0)}{2} > E$, что противоречит закону сохранения энергии.

Во-вторых, точка пересечения с границей может лежать на одном из отрезков $x = \pm\varepsilon$, тогда $\frac{y^2}{2} + U(x) \geqslant U(x) \geqslant a > E$, и закон сохранения энергии снова нарушается. □

Итак, лемма доказана. Понятно, что из неё следует устойчивость по Ляпунову точки 0.

Теперь посмотрим, с какой скоростью решение уравнения вращается вокруг нуля.

Пусть функция $\varphi(x, y)$ — угол между векторами (x, y) и $(1, 0)$. Тогда для каждого решения $(x(t), y(t))$ можно рассмотреть функцию $\varphi(t) = \varphi(x(t), y(t))$. Вычислим её производную $\dot\varphi$. Строго говоря, функция $\varphi(t)$ многозначна (определена с точностью до прибавления $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$), но её производная определена однозначно (ср. с рассуждением из раздела 11.6).

Заметим, что в правой полуплоскости $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, а в левой — $\varphi(x, y) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (оба равенства выполнены с точностью до прибавления $2\pi n$). Поэтому производная $\dot\varphi(t)$ равна

$$\dot\varphi = \frac{x\dot y - y\dot x}{x^2 + y^2} = \frac{xF(x) - y^2}{x^2 + y^2} = -1 + \frac{x^2(\frac{F(x)}{x} + 1)}{x^2 + y^2} \qquad (82)$$

Чтобы исследовать функцию $\frac{F(x)}{x}+1$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 13.11 (Адамар)**.** *Если функция f непрерывно-дифференцируема: $f \in C^1(\mathbb{R})$, и $f(0)=0$, то функцию f можно представить в виде $f(x)=xg(x)$, где функция g непрерывна: $g \in C(\mathbb{R})$, и $g(0)=f'(0)$.*

Доказательство леммы. Положим

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

при $x \neq 0$. Тогда функцию $g(x)$ можно доопределить в точку 0 по непрерывности, ведь по определению производной

$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).$$

□

Применим эту лемму для правой части нашего дифференциального уравнения $F=-\frac{dU}{dx}$. Мы знаем, что $F(0)=-\frac{dU}{dx}|_{x=0}=0$, и $F'(0)=-\frac{d^2U}{dx^2}|_{x=0}=-1$. Значит, для некоторой непрерывной функции g выполнено $F(x)=xg(x)$. При этом, по лемме Адамара, $g(0)=F'(0)=-1$.

Обозначим $\psi(x)=g(x)+1$. Тогда $\psi(0)=0$, и при $x\neq 0$ выполнено $\psi(x)=\frac{F(x)}{x}+1$.

Теперь вернёмся к вычислению производной функции φ. По доказанному,

$$\dot{\varphi}=-1+\frac{x^2}{x^2+y^2}\psi(x); \tag{83}$$

в этом равенстве $x=x(t), y=y(t)$. Строго говоря, мы доказали это равенство в случае $x(t)\neq 0$; но в случае $x(t)=0$ оно тоже выполнено, в силу непрерывности левой и правой части.

Если фазовая кривая $(x(t),y(t))$ начинается достаточно близко к нулю, то она не покидает некоторой малой окрестности нуля (мы пользуемся устойчивостью по Ляпунову), поэтому значение $\psi(x(t))$ остаётся близким к значению $\psi(0)=0$. Значение дроби $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ не превосходит 1. Значит, если фазовая кривая

начинается достаточно близко к нулю, величина $\dot{\varphi}$ достаточно близка к (-1) на всей фазовой кривой.

Поэтому за время, близкое к 2π, кривая сделает полный оборот. Докажем, что при этом фазовая кривая (если она достаточно близка к нулю) обязательно замкнется. Предположим, что кривая сделала полный оборот и из точки $(x_1, 0)$ пришла в точку $(x_2, 0)$ (где $x_1 > 0, x_2 > 0$), но не замкнулась: $x_1 \neq x_2$. Тогда по закону сохранения энергии $U(x_1) = U(x_2)$, поэтому в какой-то точке η на отрезке $[x_1, x_2]$ выполнено $U'(\eta) = 0$. Но $U'(0) = 0$, поэтому в какой-то точке ξ на отрезке $[0, \eta]$ выполнено $U''(\xi) = 0$. При этом функция U'' непрерывна, и $U''(0) = 1$. Поэтому в достаточно маленькой окрестности нуля производная U'' не принимает значения 0, и такой ситуации не возникает.

Итак, если фазовая кривая достаточно близка к нулю, то она делает полный оборот за время, сколь угодно близкое к 2π, и при этом замыкается. Утверждение доказано. □

Упражнение 38. *Пользуясь доказанным предложением 13.8, вычислите период малых колебаний математического маятника вблизи нижнего положения равновесия.*

14. Дополнение: некоторые определения из математического анализа

Определение 14.1. **Кривая** γ в n-мерном пространстве — это непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Иногда мы будем рассматривать кривые **с точностью до параметризации**: другими словами, для произвольного диффеоморфизма $\phi\colon [a, b] \to [a', b']$ мы будем отождествлять кривые $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\phi(\tau))$. Диффеоморфизм ϕ мы будем называть «замена переменной» или «переход от параметра τ к параметру t».

Определение 14.2. **Дифференциал** отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке p — это линейное отображение $df|_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, для которого

$$f(x) = f(p) + df|_p(x - p) + o(\|x - p\|).$$

Определение 14.3. **Матрица Якоби** отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке p — это матрица линейного оператора $df|_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в

некоторой системе координат $(x_1 \dots x_n)$. Элементами этой матрицы являются **частные производные** $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, где $f_j(x)$ — это j-я координата вектора $f(x) = (f_1(x), \dots f_m(x))$. Матрица Якоби меняется при изменении системы координат так же, как и любая матрица линейного оператора.

Определение 14.4. **Градиент** функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (размерность образа равна 1) в точке p — это вектор grad f, двойственный к линейному функционалу $df|_p$ относительно стандартного скалярного произведения:

$$\langle \text{grad } f|_p,\, v\rangle = df|_p v \text{ для любого вектора } v.$$

Градиент зависит от выбора скалярного произведения.

Когда размерность образа равна 1, дифференциал является линейным оператором с коэффициентами $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. **Если система координат ортонормирована** относительно скалярного произведения (то есть $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$), то двойственным к дифференциалу будет вектор

$$\text{grad}\, f|_p = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Определение 14.5. **Производная отображения** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **вдоль вектора** v в точке p — это производная отображения $t \mapsto f(p + vt)$ в точке $t = 0$:

$$\mathcal{L}_v f = \left.\frac{d}{dt} f(p + vt)\right|_{t=0}.$$

Альтернативное определение производной вдоль вектора таково:

$$\mathcal{L}_v f = \left.\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right|_{t=0},$$

где $\gamma(t)$ — кривая, для которой $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$. Видно, что понятие производной вдоль вектора не зависит от выбора координат и скалярного произведения.

По формуле дифференцирования сложной функции получаем

$$\mathcal{L}_v f = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n = df|_p v.$$

Это равенство выполнено в любой системе координат. Его можно доказать и без использования координат: так как $\gamma(0) = p$,

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = df|_p(\gamma(t) - \gamma(0)) + o(\|\gamma(t) - \gamma(0)\|),$$

поэтому после деления левой и правой части на t и предельного перехода $t \to 0$ получаем

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df|_p \dot{\gamma}(0) = df|_p v,$$

что и требовалось.

Если $m = 1$, можно выразить производную вдоль вектора через градиент:

$$\mathcal{L}_v f = \langle \operatorname{grad} f_p,\, v \rangle, \tag{84}$$

пользуясь определением градиента. Заметим, что хотя градиент меняется при изменении скалярного произведения, правая часть равенства (84) не зависит ни от выбора скалярного произведения, ни от выбора системы координат.

Определение 14.6. **Касательное пространство** $T_p\Omega$ к открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Omega$ — это множество векторов, отложенных от точки p. Как векторное пространство оно изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Определение 14.7. **Касательное пространство** $T_p\gamma$ к кривой $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \gamma$ — это одномерное векторное пространство, порождённое касательным вектором к кривой γ в точке p. Предполагается, что этот касательный вектор ненулевой.

По аналогии с этим определением можно определить касательное пространство к любой поверхности в $\mathbb{R}^n$. Мы не будем этого делать.

Определение 14.8. **Стандартный базис касательного пространства** к области в $\mathbb{R}^n$ состоит в каждой точке из базисных

векторов

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1,\, 0, \ldots,\, 0) =: \frac{\partial}{\partial x_1} \\
e_2 &= (0,\, 1, \ldots,\, 0) =: \frac{\partial}{\partial x_2} \\
&\ldots \\
e_n &= (0,\, 0, \ldots,\, 1) =: \frac{\partial}{\partial x_n}
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Примечание 14.9. *Обозначение* $\frac{\partial}{\partial x_j}$ *возникло потому, что вектор* $e_j \in T_p\Omega$ *каждой функции* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ставит в соответствие число* $\mathcal{L}_{e_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. *Значит, этот вектор действует на функцию* f *так же, как и оператор* $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Определение 14.10. **Кокасательное пространство** $T_p^*\Omega$ к открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \Omega$ — это пространство, двойственное к $T_p\Omega$. Другими словами, это пространство линейных функционалов на касательном пространстве. Как векторное пространство оно тоже изоморфно $\mathbb{R}^n$. Заметим, что дифференциал функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке p — элемент кокасательного пространства: $df|_p \in T_p^*\Omega$.

Определение 14.11. **Стандартный базис кокасательного пространства** состоит в каждой точке из базисных векторов

$$
\begin{aligned}
&(1, 0, \ldots, 0) = dx_1 \\
&(0, 1, \ldots, 0) = dx_2 \\
&\ldots \\
&(0, 0, \ldots, 1) = dx_n
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Это — двойственный базис к стандартному базису касательного пространства. Линейный функционал $dx_j \in T_p^*\Omega$ — это дифференциал функции x_j.

Определение 14.12. **Касательное расслоение** $T\Omega$ над открытым множеством $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это множество пар вида

$$
(\text{точка } p \in \Omega,\ \text{касательный вектор } v \in T_p\Omega \text{ в точке } p).
$$

Слоем касательного расслоения называется его подмножество $\{(p_0, v) \mid v \in T_{p_0}\Omega\}$ для любого фиксированного значения p_0. Значит, слой — это касательное пространство в точке p_0.

Дословно таким же образом можно определить понятие касательного расслоения $T\gamma$ над кривой γ: это множество пар вида (точка кривой, касательный вектор в этой точке).

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ касательное расслоение изоморфно прямому произведению $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Но если в качестве Ω взять сферу, то невозможно будет построить изоморфизм между касательным расслоением и прямым произведением $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Определение 14.13. **Кокасательное расслоение** $T^*\Omega$ над открытым множеством $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это множество пар вида (p, ξ), где $p \in \Omega$ — точка пространства, а $\xi \in T_p^*\Omega$ — элемент кокасательного пространства в точке p. **Слоем** кокасательного расслоения над точкой $p_0 \in \Omega$ называется его подмножество $\{(p_0, \xi) \mid \xi \in T_{p_0}^*\Omega\}$. То есть слой — это кокасательное пространство в точке p_0.

Кокасательное расслоение $T^*\Omega$ над областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ изоморфно $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Но в более общем случае, как и для касательного расслоения, нет никакого естественного изоморфизма между $T^*\Omega$ и $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Определение 14.14. **Векторное поле** — это непрерывное отображение $W\colon \Omega \to T\Omega$ вида $p \mapsto (p,\, v(p))$. Другими словами, в каждой точке $p \in \Omega$ приложен вектор $v(p) \in T_p\Omega$. В стандартных координатах (см. определение 14.8) векторное поле имеет вид:

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

где функции $a_1, \ldots, a_n$— непрерывные функции на Ω.

Определение 14.15. **Дифференциальная 1-форма** — это непрерывное отображение $\omega\colon \Omega \to T^*\Omega$ вида $\omega\colon p \mapsto (p,\, v^*(p))$. Другими словами, для каждой точки $p \in \Omega$ выбран линейный функционал $v^*(p)$ на касательном пространстве в этой точке.

В стандартных координатах (см. определение 14.11) дифференциальная форма имеет вид:

$$\omega = a_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n,$$

где функции $a_1(p), \ldots, a_n(p)$ — координаты функционала $v^*(p)$ в стандартном базисе. Обычно мы будем дополнительно требовать, чтобы функции a_i были гладкими.

Дифференциальная форма ω позволяет поставить каждому элементу (p, v) касательного расслоения $T\Omega$ число $(v^*(p))(v)$, то есть задаёт функцию на касательном расслоении. В координатах, если вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$ приложен в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, то

$$\omega(v) = a_1(x_1, \ldots, x_n)v_1 + a_2(x_1, \ldots, x_n)v_2 + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)v_n,$$

так как по определению дифференциала $dx_j(v) = v_j$.

Определение 14.16. **Интеграл по кривой** $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ **от дифференциальной 1-формы** ω в $\mathbb{R}^m$ — это величина

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 \omega(\dot\gamma(t))dt.$$

Интеграл не меняется при изменении параметризации кривой γ (см. предложение 11.10).

Это же определение можно переписать в координатах.

Определение 14.17 (Определение с использованием координат). **Интеграл по кривой** $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots \gamma_m(t))$**,** $t \in [0,1]$ **от дифференциальной формы** $\omega = F_1(x_1, \ldots, x_m)dx_1 + \ldots + F_m(x_1, \ldots, x_m)dx_m$ — это величина

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (F_1 dx_1 + \ldots + F_m dx_m) := \int_0^1 (F_1\dot\gamma_1 + \ldots + F_m\dot\gamma_m)dt.$$

Определение 14.18. **Несобственным интегралом первого рода** называется запись вида

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом подотрезке $[a,x] \subset [a,b)$. Несобственный интеграл первого рода называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to b-0} \int_a^x f(t)dt;$$

в этом случае этот предел называется *значением* несобственного интеграла. В противном случае несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для функций, определенных на полуинтервале $(a, b]$.

Определение 14.19. **Несобственный интеграл второго рода** — это запись вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

где функция f определена на луче $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом подотрезке $[a, x] \subset [a, +\infty)$ этого луча. Несобственный интеграл второго рода называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt;$$

в этом случае этот предел называется *значением* несобственного интеграла. В противном случае несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Александр Игоревич Буфетов, Наталия Борисовна Гончарук,
Юлий Сергеевич Ильяшенко

Конспект курса
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»,
часть I

М., Издательство попечительского совета механико–математического факультета МГУ, 2012. — 120 стр.

Подписано в печать 12.03.2012.

Формат 60×90 1/16. Объем 7,5 п.л.

Заказ 6 Тираж 250 экз.

Издательство попечительского совета механико–математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико–математического факультета.