Линейные неавтономные системы

А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко

10 февраля 2015 г.

В предыдущих лекциях исследовались линейные автономные системы. Они допускают точные решения, которые выражаются просто через экспоненту того линейного оператора, который стоит в правой части системы. Теперь мы переходим к линейным неавтономным системам. Ситуация здесь в корне иная. Линейные неавтономные системы, как правило, *не решаются.* Это относится даже к такой простой системе, как

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} x.$$

Эта система эквивалентна *уравнению Эйри*:

$$\ddot{u} = tu.$$

Слова "не решаются" надо понимать не в том смысле, что уравнение Эйри и другие подобные системы мы пока не научились решать. Эти слова означают, что *не существует* формул, которые выражают решения линейных неавтономных систем через их коэффициеты с помощью элементарных функций, алгебраических операций (включая решение алгебраических уравнений), логарифмирования, потенцирования, дифференцирования, интегрирования.

Поэтому неавтономные линейные системы приходится исследовать "качественно".

1 Глобальная теорема существования.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \, t \in I, \tag{1}$$

где I — интервал на прямой, конечный или бесконечный, а $A(t)$ — линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ пространство всех линейных операторов $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; тогда система (1) задаёт отображение $A\colon I \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ вида $t \mapsto A(t)$.

Упражнение 1. *Найти* $\dim \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Пусть* $A\colon I \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *— отображение класса* C^1*. Тогда все решения системы* (1) *определены на всем интервале* I*.*

Примечание 2. *На самом деле в теореме 1 достаточно потребовать непрерывности отображения A. Но так теорема лучше приспособлена к тому, чтобы в ее доказательстве воспользоваться теоремой существования из первого семестра.*

В учебниках существует много доказательств этой теоремы. Все они требуют тех или иных выкладок. Приведенное ниже чисто словесное доказательство найдено С.Ю.Яковенко, когда мы работали с ним над книгой "Лекции по теории аналитических дифференциальных уравнений."

Доказательство. Мы воспользуемся глобальной теоремой о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных условий. Напомним ее.

Теорема 3. *Рассмотрим систему*

$$\dot{x} = v(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

с C^1-гладкой правой частью: $v \in C^1(\Omega)$. Пусть φ — решение, определенное на отрезке $[a, b]$ оси t (это значит, что решение определено на некотором интервале, содержащем этот отрезок). Тогда все решения с достаточно близкими к $\varphi(a)$ начальными условиями тоже определены на $[a, b]$ и на этом отрезке близки к φ. Более точно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для любого x, такого что $|x - \varphi(a)| < \delta$, существует единственное решение ψ с начальным условием $\psi(a) = x$; это решение определено на всем отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет на нем неравенству:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b].$$

Докажем теперь, что решение Ψ уравнения (1), определенное в окрестности точки $a \in I$, определено также в любой точке $b \in I$. Для этого применим теорему 3 к системе (1). У системы (1) есть одно замечательное решение, определенное на всем интервале I:

$$\varphi(t) \equiv 0.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$ и такое δ, что любое решение ψ с начальным условием $|\psi(a)| < \delta$ определено на всем отрезке $[a, b]$ (и там не превосходит по модулю 1, что нам не понадобится). Рассмотрим теперь такое α, что $|\alpha\Psi(a)| < \delta$. Тогда решение ψ с начальным условием $\alpha\Psi(a)$ определено на всем отрезке $[a, b]$. По теореме единственности,

$$\Psi(t) = \alpha^{-1}\psi(t).$$

Следовательно, оно тоже определено на всем отрезке $[a, b]$. □

2 Теорема об изоморфизме.

В этом и следующем разделе мы вновь (повторяя раздел 2.3.4) обсудим теорему об изоморфизме, ФСР и ФМР дифференциального уравнения, но на этот раз — для неавтономных линейных уравнений.

Предыдущая теорема позволяет брать линейные комбинации решений системы (1), не заботясь об области определения слагаемых: все решения определены на общей области — интервале I.

Решения системы (1) образуют линейное пространство: сумма двух решений и решение, умноженное на число — снова решения, в силу линейности системы. Нулем в этом линейном пространстве является тождественно нулевая вектор-функция. Линейная независимость решений не нуждается в специальном определении: она уже определена в линейной алгебре для любого линейного пространства.

Теорема 4. *Пространство решений $\mathcal{L}$ системы* (1) *изоморфно пространству начальных условий $\mathbb{R}^n$. Для любого $a \in I$ естественное отображение*

$$\varphi \mapsto \varphi(a) \tag{2}$$

определено и является изоморфизмом $\mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Отображение (2) определено на всем пространстве $\mathcal{L}$ по теореме 1. Это отображение линейно по определению. Оно эпиморфно (отображение НА) по теореме существования. Оно мономорфно (каждому начальному условию соответствует не более одного решения) по теореме единственности. Следовательно, отображение (2) — изоморфизм. □

3 Фундаментальная система решений.

Определение 5. *Фундаментальной системой решений* называется базис в пространстве решений.

Возникает естественный вопрос: зачем одно и то же понятие называть двумя именами примерно одинаковой длины? Ответ связан с историей. Понятие фундаментальной системы решений возникло раньше (XVIII век), чем были развиты концепции линейной алгебры (вторая половина XIX века). Поэтому термин “фундаментальная система” возник, стал привычным и дошел до наших дней.

Мы уже имели дело с фундаментальными системами решений.

Пример 6. *Пусть линейный оператор* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *имеет базис из собственных векторов* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$*, которым соответствуют собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$*. Тогда фундаментальная система решений уравнения*

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

имеет вид:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \quad \varphi_j = e^{\lambda_j t}\xi_j.$$

Пример 7. *Пусть линейный оператор* ${}^{\mathbb{C}}A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *имеет собственный базис* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}^n$*, причем первые* $2k$ *из соответствующих собственных значений*

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k,\ \lambda_{k+1} = \bar{\lambda}_1, \ldots,\ \lambda_{2k} = \bar{\lambda}_k$$

невещественны, а остальные

$$\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$$

— вещественны. Тогда фундаментальная система решений уравнения (3) *над полем комплексных чисел имеет вид:*

$$\varphi_j = e^{\lambda_j t}\xi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Фундаментальная система решений уравнения (3) *над полем вещественных чисел имеет вид:*

$$\Psi_j = \operatorname{Re} e^{\lambda_j t}\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\Xi_j = \operatorname{Im} e^{\lambda_j t}\xi_j,\ j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\Phi_j = e^{\lambda_j t}\xi_j,\ j = 2k+1, \ldots, n$$

(докажите это!).

Пример 8. *Если* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *— жорданов базис для оператора* A*, состоящего из одной жордановой клетки порядка* k*:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

то (в соответствии с результатом параграфа 2.5) фундаментальная система решений уравнения (3) *имеет вид:*

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = e^{\lambda t}\xi_1, \\ &\varphi_2 = e^{\lambda t}(\xi_2 + t\xi_1), \\ &\ldots \\ &\varphi_k = e^{\lambda t}\left(\xi_k + t\xi_{k-1} + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\xi_1\right). \end{aligned}$$

Каждой фундаментальной системе решений соответствует фундаментальная матрица решений: j-м столбцом этой матрицы является j-е решение фундаментальной системы. Фундаментальная матрица решений системы (1) обозначается обычно через X. Из определения фундаментальной матрицы сразу следует, что $\dot{X} = A(t)X$. Для любого вектора $c \in \mathbb{R}^n$, Xc — решение системы (1), равное линейной комбинации столбцов матрицы X с коэффициентами c_j — компонентами вектора c. Любые две фундаментальные матрицы решений одной системы, X и Y, связаны соотношением

$$X = YC,$$

где C — постоянная матрица.

4 Определитель Вронского.

Определение 9. *Определитель Вронского* — это определитель фундаментальной матрицы решений системы (1):

$$W(t) = \det X(t). \tag{4}$$

На первый взгляд кажется, что вычислить определитель Вронского сложнее, чем решить систему: даже для известной матрицы определитель считается не сразу, а фундаментальную матрицу решений, как правило, вообще нельзя найти! Однако, на самом деле, определитель Вронского для системы (1) вычисляется легко.

Теорема 10. *(Лиувилль, Остроградский)*

$$\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) W. \tag{5}$$

Такое уравнение мгновенно решается методом разделения переменных:

Следствие 11. $W(t) = W(0) \exp \int_0^t a(\tau) d\tau$, *где* $a = \operatorname{tr} A$.

Доказательство теоремы 10. . Теорема следует из того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, и из леммы об определителе «почти единичной» матрицы (см. ниже). Имеем:

$$W(t+h) = \det X(t+h) = \det \Big(X(t) + \dot{X}(t)h + o(h) \Big) =$$
$$= \det \left[(E + A(t)h + o(h)) X(t) \right] = \det \left(E + A(t)h + o(h) \right) W(t).$$

Осталось доказать лемму:

Лемма 12. $\det(E + Ah) = 1 + \operatorname{tr} Ah + o(h)$.

□

Доказательство леммы 12. Докажем лемму сначала для случая матриц порядка 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$\det(E + Ah) = 1 + (1 + ah)(1 + dh) - bch^2 = 1 + \operatorname{tr} Ah + O(h^2).$$

При $n = 2$ лемма доказана. В общем случае доказательство аналогично. А именно, любое слагаемое в выражении для определителя матрицы $E + Ah$, которое содержит хотя бы один внедиагональный элемент, содержит и еще один внедиагональный элемент, и поэтому имеет порядок $O(h^2)$. Следовательно, вклад $O(h)$ в определитель дает только произведение диагональных элементов матрицы $E + Ah$:

$$(1 + a_{11}h) \dots (1 + a_{nn}h) = 1 + \sum a_{ii}h + O(h^2) = 1 + \operatorname{tr} Ah + o(h).$$

□

5 Еще раз о методе вариации постоянной.

Линейные однородные автономные системы, как правило, не решаются. Но если такая система уже решена, соответствующая неоднородная система решается всегда. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{6}$$

и предположим, что фундаментальная система решений X соответствующей однородной системы известна:

$$\dot{X} = A(t)X \tag{7}$$

Тогда решение неоднородной системы (6) можно искать в виде $Xc(t)$, где вектор-функция c выражается через X и b с помощью интеграла. Чтобы увидеть это, подставим $x(t) = X(t)c(t)$ в систему (6):

$$\dot{X}c + X\dot{c} = AXc + b.$$

В силу (7), первые слагаемые в обеих частях сокращаются. Поэтому

$$X\dot{c} = b$$

и

$$\dot{c} = X^{-1}b,$$

а из этого уравнения всегда можно найти $c(t)$, просто проинтегрировав правую часть.

Название метода происходит от того, что вектор-функция Xc с постоянным c является решением однородного уравнения. Если постоянный вектор c заменить переменным (то есть *проварьировать постоянную*), то получится решение неоднородного уравнения.