

Курс «Числа вращения и модули эллиптических кривых»

Наталия Гончарук, natalka@mccme.ru

11 октября 2011 г.

1. Группа $PSL(2, \mathbb{Z})$ — это группа всех дробно-линейных отображений вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$. Докажите, что она порождается отображениями вида $z \mapsto z + 1$ и $z \mapsto -\frac{1}{z}$.
2. Рассмотрим область M в верхней полуплоскости, ограниченную двумя прямыми $\operatorname{Re} z = \pm \frac{1}{2}$ и окружностью $|z| = 1$. Докажите, что образы этой области под действием отображений из группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ образуют замощение верхней полуплоскости.
Отсюда следует, что пространство модулей эллиптических кривых — это область M , точки границы которой склеены по правилу $z \sim z + 1$, $z \sim -1/\bar{z}$.
3. Найдите все автоморфизмы эллиптической кривой $\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle$.
4. Найдите все пары коммутирующих голоморфных автоморфизмов диска без неподвижных точек. Докажите, что факторизацией по таким парам отображений нельзя получить тор.
5. Докажите, что график (многозначной) функции $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ в $\mathbb{C}P^2$ — тор.
6. Докажите, что отображение $z \rightarrow [1 : \wp : \wp']$ из эллиптической кривой в $\mathbb{C}P^2$ инъективно, а его дифференциал невырожден.
7. Найдите связь между коэффициентами уравнения $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ и модулем эллиптической кривой, которая является его графиком.
8. а) Докажите, что $\operatorname{sn}^2(z) = \frac{C_1}{\wp(z) - C_2}$ для некоторых констант C_1, C_2 .
б) Найдите константы C_1, C_2 .