Курс «Числа вращения и модули эллиптических кривых»

Наталия Гончарук, natalka@mccme.ru

27 сентября 2011 г.

Схема доказательства теоремы Арнольда-Эрмана-Йоккоза (конспект лекции)

На этой лекции я расскажу схему доказательства теоремы Арнольда[1]-Эрмана[2]-Йоккоза[3] о гладком сопряжении диффеоморфизмов окружности с поворотом. Доказательство отличается от оригинальных доказательств Арнольда, Эрмана и Йоккоза; рассказ следует статье Я. Синая и К. Ханина[4].

Теорема в одной из наиболее общих формулировок звучит так:

Теорема. *Пусть C^r-гладкий диффеоморфизм окружности f имеет диофантово число вращения $\rho(f)$. Тогда он C^{r-2}-гладко сопряжён повороту.*

Определение. Вещественное число x называется диофантовым ($x \in D_{C,\delta}$), если оно плохо приближается рациональными: для любого рационального числа $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^{2+\delta}}.$$

Если мы говорим о множестве диофантовых чисел, не указывая C и δ, мы имеем в виду объединение $D = \cup_{C,\delta} D_{C,\delta}$.

Замечание (Несколько фактов о диофантовых числах)**.** *Множество диофантовых чисел довольно велико. Оно несчетно; более того, случайно выбранное вещественное число является диофантовым. Корень любого многочлена с целыми коэффициентами (например, $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt[5]{3}}$ и т. д.) — диофантово*

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1961.— Т. 25:1.— С. 21—86.

[2] Michael R. Herman, «Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations», Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 49 (1979), p. 5-233.

[3] J.-C. Yoccos, «Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne», Annales scientifiques de l'E.N.S, 4e, tome 17, no 3 (1984), p. 333-359.

[4] Я. Г. Синай, К. М. Ханин, «Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами», Успехи математических наук, т. 44, вып. 1(265), 1989 г., с 57–81.

число. Иррациональные числа, не являющиеся диофантовыми, называются лиувиллевыми. Их тоже несчетное множество. Все они трансцендентны. Например, число $\sum \frac{1}{10^{n!}}$ *лиувиллево.*

В.И. Арнольд показал, что от условия диофантовости числа вращения в формулировке теоремы избавиться нельзя.

Я расскажу доказательство этой теоремы для $r = 3$, опуская некоторые технические подробности. **Вместо диофантовых чисел мы будем рассматривать множество M таких чисел $\rho(f)$, что в цепной дроби числа $\rho(f)$, $\rho(f) = [k_1, k_2 \dots]$, значения k_n растут не слишком быстро:** $k_n \leq n^c$. Случайно выбранное вещественное число обладает этим свойством[5].

1 Какому условию удовлетворяет производная сопряжения с поворотом?

По теореме Данжуа, существует непрерывное отображение h, сопрягающее f с поворотом $R_{\rho(f)}$:

$$h(f(x)) = h(x) + \rho(f). \tag{1}$$

Более того, из доказательства теоремы Данжуа видно, что отображение h единственно с точностью до прибавления константы. Действительно, если мы положим $h(x) = c$, значения h будут нам известны во всех точках $f^n(x)$. Эти точки образуют всюду плотное множество. Значит, значения h нам известны на всей окружности (по непрерывности h). Беря разные c, мы будем получать функции h, отличающиеся на константу.

Если у отображения h существовала бы непрерывная производная $p = h'$, то для неё было бы выполнено равенство

$$p(f(x)) \cdot f'(x) = p(x) \tag{2}$$

— мы продифференцировали равенство (1). И наоборот:

Лемма 1. *Если ненулевая непрерывная функция p удовлетворяет уравнению* (2)*, то после домножения на некоторую константу она будет равна h'.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $H(x) = \int_0^x p(t)dt$. Она может быть некорректно определена как функция на окружности: $H(x+1) \neq H(x) + 1$; в этом случае мы домножим p на такую константу, чтобы равенство $H(x+1) = H(x) + 1$ было выполнено. Равенство (2) при этом не нарушится. Проинтегрируем равенство (2). Мы получим

$$H(f(x)) = H(x) + C$$

для некоторого C. То есть отображение H сопрягает отображение f с поворотом на угол C.

[5]Доказательства этого факта я не привожу. Он следует из того, что отображение $x \to \{1/x\}$, с помощью которого строятся цепные дроби, имеет *инвариантную меру* с плотностью $1/(1+x)$ (см., напр., В.И.Арнольд, «Цепные дроби», эскиз доказательства теоремы Кузьмина)

Но число вращения не меняется при сопряжении, поэтому $C = \rho(f)$. Значит, отображение H сопрягает f с поворотом на угол $\rho(f)$. Поэтому отображения H и h отличаются на константу, откуда $h' = p$. $\square$

Тем самым, если мы построим *непрерывную* функцию p, удовлетворяющую уравнению (2), она будет равна $h' \cdot const$; поэтому производная h' будет непрерывна ($h \in C^1$) что нам и нужно доказать.

2 Непрерывное решение уравнения (2)

Мы ищем непрерывное решение p уравнения (2). Пусть $p(x) = c$. Тогда

$$p(f^n(x)) = \frac{p(x)}{\prod_{i=0}^{n} f'(x_i)} = \frac{c}{(f^n)'(x)}.$$

Поэтому мы знаем значения функции p в точках орбиты x. Орбита точки x плотна (см. доказательство теоремы Данжуа). Осталось показать, что в ограничении на множество точек $\{x, f(x), f^2(x)\dots\}$ функция p непрерывна. Если мы это докажем, функцию p можно будет продолжить по непрерывности на всю окружность, и равенство (2) будет выполнено (его можно будет доказать, переходя к пределу в левой и правой части).

Итак, осталось доказать следующее:

Лемма 2. *Пусть f – C^3-гладкое отображения окружности с числом вращения $\rho(f) \in M$. Тогда для любой точки $y = f^k(x)$ и для любого ε найдётся такое δ, что если $f^m(y) \in [y-\delta, y+\delta]$, то $(f^m)'(y) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.*

3 Сведение леммы 2 к оценке на производную $(f^{q_n})'$.

Лемму 2 мы докажем с помощью следующей оценки.

Лемма 3. *Для C^3-гладкого отображения окружности f с иррациональным числом вращения выполнено*

$$|\ln(f^{q_n})'(x)| < \varepsilon_n, \text{ где } \varepsilon_n = C\mu^n,\ \mu < 1. \qquad (3)$$

Эта оценка усиливает вторую лемму из доказательства теоремы Данжуа.

Выведем лемму 2 из леммы 3. Идея доказательства заключается в том, чтобы представить число m из условия леммы 2 в виде $m = q_n + a_{n+1}q_{n+1} + \dots + a_s q_s$ и оценить $(f^m)'(y)$, пользуясь неравенством (3).

Доказательство леммы 2 по модулю леммы 3. Нам достаточно доказать, что если $f^m(y) \in [y, f^{q_n}(y)]$ для достаточно большого n, то $(f^m)'(y) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Возьмём точку y_{q_n}. Будем брать одну за другой точки

$$y_{q_n},\ y_{q_n+q_{n+1}},\ y_{q_n+2q_{n+1}},\ y_{q_n+3q_{n+1}}\ \dots,$$

пока точка y_m не попадёт внутрь очередного отрезка

$$y_m \in [y_{q_n+(a_{n+1}-1)q_{n+1}},\ y_{q_n+a_{n+1}q_{n+1}}].$$

Теперь на этом отрезке мы будем последовательно брать точки

$$y_{q_n+a_{n+1}q_{n+1}+q_{n+2}},\quad y_{q_n+a_{n+1}q_{n+1}+2q_{n+2}},\quad y_{q_n+a_{n+1}q_{n+1}+3q_{n+2}}\cdots,$$

пока снова не перепрыгнем через точку y_m, и т.д. Рано или поздно мы попадём в точку y_m. Тем самым, мы представим число m в виде

$$m = q_n + a_{n+1}q_{n+1} + a_{n+2}q_{n+2} + \cdots + a_s q_s.$$

При этом $a_i \leq k_{i+1}$ по определению чисел k_i.

Замечание. *Если $\rho(f) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, из представления числа m в таком виде можно получить его представление в Фибоначчиевой системе счисления (в этом случае q_n — числа Фибоначчи). Любое число m можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, в которой не встречаются соседние числа; поэтому каждому числу можно поставить в соответствие запись из 0 и 1, где нет соседних единиц. Эта запись и называется записью в Фибоначчиевой системе счисления.*

Значит, отображение f^m — это композиция одного отображения f^{q_n}, a_{n+1} отображений $f^{q_{n+1}}$, $\dots$, a_s отображений f^{q_s}. Поэтому для его производной в точке y выполнена оценка

$$|\ln(f^m)'(y)| \leq \varepsilon_n + \sum_{i\geq n} k_{i+1}\varepsilon_i.$$

Заметим, что ряд $\sum_{i\geq 0} k_{i+1}\varepsilon_i$ сходится, так как последовательность ε_n убывает как геометрическая прогрессия, а последовательность k_n возрастает не быстрее, чем n^c. Значит, хвост этого ряда $\sum_{i\geq n} k_{i+1}\varepsilon_i$ можно сделать сколь угодно маленьким, выбрав большое n.

Лемма 2 доказана. □

4 Идея доказательства леммы 3 об оценке на производную $(f^{q_n})'$

Лемму 3 мы докажем с помощью идеи *ренормализации.*

4.1 Ренормализация

Рассмотрим отрезок $I_n = [f^{q_n}(x), f^{q_{n+1}}(x)], x \in I_n$. Рассмотрим *отображение первого возвращения* P на этом отрезке: точку $y \in I_n$ отобразим в первую из точек орбиты $f(y), f^2(y), \dots$, которая принадлежит I_n.

Отображение P разрывно: на отрезке $[f^{q_n}(x), x]$ оно равно $f^{q_{n+1}}$, а на отрезке $[x, f^{q_{n+1}}(x)]$ оно равно f^{q_n}. Если у отрезка I_n склеить концы, отображение станет непрерывным (именно такое отображение обычно называют ренормализацией). Мы этого делать не будем.

Растянем отрезок I_n таким образом, чтобы отрезок $[f^{q_n}(x), x]$ стал отрезком длины 1 и перешел в отрезок $[-1, 0]$. Отрезок $[x, f^{q_{n+1}}(x)]$ при этом перейдёт в отрезок $[0, a_n]$, $a_n = \frac{|[x, f^{q_{n+1}}(x)]|}{|[x, f^{q_n}(x)]|}$. Отображение P превратится в какое-то отображение $\tilde{P}$ отрезка $[-1, a_n]$. Отображение $\tilde{P}$ в ограничении на отрезок $[-1, 0]$ мы обозначим g_n^{long}, а в ограничении на отрезок $[0, a_n]$ — g_n^{short}.

Поймём, как меняется пара отображений $(g_n^{long}, g_n^{short})$ при переходе от n к $n+1$. Пара отображений $(f^{q_{n+1}}, f^{q_n})$ меняется так: она переходит в пару $(f^{q_{n+2}}, f^{q_{n+1}})$, причём $f^{q_{n+2}} = (f^{q_{n+1}})^{k_{n+2}} \circ f^{q_n}$. Пара $(g_n^{long}, g_n^{short})$ отличается от неё только растяжением отрезка в $\left(-\frac{1}{a_n}\right)$ раз. Поэтому

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{long} &= -\frac{1}{a_n}(g_n^{long})^{k_{n+2}} \circ g_n^{short}(-a_n \cdot x), \\ g_{n+1}^{short}(x) &= -\frac{1}{a_n} g_n^{long}(-a_n \cdot x). \end{aligned} \tag{4}$$

5 План доказательства леммы 3 об оценке на производную $(f^{q_n})'$

Мы выясним (в пункте 5.2), что отображение $f^{q_{n+1}}$ в ограничении на отрезок $[f^{q_n}(x), x]$ мало меняет двойное отношение четвёрок точек (не более чем в $1 + C\lambda^n$ раз, $\lambda < 1$). Значит, отображение g_n^{long} тоже мало его меняет: от отображения $f^{q_{n+1}}$ оно отличается только растяжением отрезка.

Но если монотонное отображение экспоненциально мало меняет двойное отношение, то оно экспоненциально близко к дробно-линейному в метрике C^0 (см. пункт 5.1). Более того, отображение g_n^{long} экспоненциально близко к дробно-линейному и в метрике C^1. Это следует из того, что вторая производная $(g_n^{long})''$ ограничена (см. пункт 5.3).

Если считать, что отображение g_n^{long} (и, аналогично, g_n^{short}) в точности дробно-линейны, то можно посчитать, к каким дробно-линейным отображениям будут близки отображения g_{n+1}^{long} и g_{n+1}^{short}. Таким образом можно построить преобразование, которое паре дробно-линейных отображений ставит в соответствие новую пару дробно-линейных отображений. Теперь надо изучить это преобразование, определенное на парах дробно-линейных отображений (см. пункт 5.4).

Оказывается, что при таком преобразовании все пары дробно-линейных отображений стремятся к парам линейных отображений экспоненциально быстро. Поэтому на самом деле отображения g_n^{long} и g_n^{short} экспоненциально близки к линейным отображениям (строго говоря, здесь нужна более аккуратная оценка, так как отображения g_n^{long} и g_n^{short} не в точности дробно-линейны). Теперь надо ограничиться преобразованием, определённым на парах линейных отображений. Оказывается, что при таком преобразовании все пары линейных отображений стремятся к парам сдвигов — линейных отображений с производной 1 (экспоненциально быстро).

Итак, в метрике C^1 отображение g_n^{long} экспоненциально близко к сдвигу. Значит, $(g_n^{long})'(y)$ экспоненциально близко к единице, и $(f^{q_{n+1}})'(y)$ экспоненциально близко к единице. Оценка доказана.

5.1 Сохранение и малое изменение двойного отношения

Двойным отношением четырёх точек называется выражение

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x_4 - x_3}{x_4 - x_2}.$$

Легко проверить, что дробно-линейные отображения $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ сохраняют двойное отношение. Верно и обратное: если отображение сохраняет двойное отношение, оно дробно-линейно.

Более того:

Лемма 4. *Если монотонно возрастающее отображение f отрезка $[a,b]$ мало меняет двойное отношение:*

$$\frac{[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]} = 1 + \nu, |\nu| < \varepsilon$$

для любой четвёрки точек $a \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le b$, то существует близкое к нему дробно-линейное отображение $D(x)$: $\max|f(x) - D(x)| \le (f(b) - f(a))\varepsilon$.

Доказательство. Проведём гиперболу $D(x) = \frac{kx+l}{mx+n}$ через три точки графика нашего отображения f. Пусть абсциссы этих точек равны a, t и b. Тогда для любой точки $x \in [t,b]$ выполнено $[a : t : x : b] = [D(a) : D(t) : D(x) : D(b)] = [f(a) : f(t) : D(x) : f(b)]$, и

$$\frac{[f(a) : f(t) : f(x) : f(b)]}{[f(a) : f(t) : D(x) : f(b)]} = 1 + \nu, |\nu| < \varepsilon.$$

Поэтому точки $f(x)$ и $D(x)$ близки: действительно, это отношение равно

$$1 + \nu = \frac{D(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(b) - f(x)}{f(b) - D(x)} = 1 + \frac{(D(x) - f(x))(f(b) - f(a))}{(f(x) - f(a))(f(b) - D(x))} \ge$$
$$\ge 1 + \frac{(D(x) - f(x))(f(b) - f(a))}{(f(b) - f(a))^2} = 1 + \frac{D(x) - f(x)}{f(b) - f(a)}.$$

Мы воспользовались тем, что значение $D(x)$ заключено между $f(a)$ и $f(b)$. Итак, $|f(x) - D(x)| \le (f(b) - f(a))\varepsilon$. То же неравенство верно и для $x \in [a,t]$. $\square$

Заметим, что точку t можно взять сколь угодно близкой к a. Сделав предельный переход, можно добиться того, что $f(a) = D(a), f(b) = D(b)$, а также $f'(a) = D'(a)$.

5.2 Почему отображение $f^{q_{n+1}}$ мало изменяет двойное отношение

Оказывается, что достаточно гладкое отображение f, определённое на маленьком отрезке длины l, меняет двойное отношение в $(1 + \nu)$ раз, где $|\nu| < Cl^2$. Константа C зависит только от оценок на производные f.

Это утверждение доказано ниже (см. лемму 5). Применим эту лемму к отображению f на отрезке $[x, f^{q_n}(x)]$ и на $(q_{n+1}-1)$ образах этого отрезка под действием f. Получим, что

$$\left|\frac{[f^{q_{n+1}}(x_1) : f^{q_{n+1}}(x_2) : f^{q_{n+1}}(x_3) : f^{q_{n+1}}(x_4)]}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]}\right| = \left|(1+\nu_1)(1+\nu_2)\dots(1+\nu_{q_{n+1}})\right| \leq$$
$$\leq 1 + C \max l_i \sum l_i \leq 1 + C \max l_i,$$

где l_i — длина i-го из образов отрезка $[x, f^{q_n}(x)]$. Последнее неравенство следует из того, что наши отрезки не пересекаются.

Но при доказательстве леммы Данжуа (в первой лемме) мы доказали, что $\max l_i \leq C\lambda^n$. Значит, отображение $f^{q_{n+1}}$ экспоненциально мало меняет двойное отношение.

Отсюда (и из утверждений пункта 5.1) следует, что отображение $f^{q_{n+1}}$ экспоненциально близко к дробно-линейному.

Нам осталось доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть $f \in C^3$ — диффеоморфизм. Тогда для любых точек $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, лежащих на отрезке длины l,*

$$\frac{[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]} = 1 + \nu, |\nu| < Cl^2,$$

где константа C не зависит от точек x_i, а зависит только от оценок на производные отображения f.

Доказательство. Оценим изменение двойного отношения.

$$\frac{[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}} \cdot \frac{\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}{\frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}} =$$
$$= \frac{f'(x_2) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_1-x_2)}{f'(x_3) + \frac{1}{2}f''(\psi)(x_1-x_3)} \cdot \frac{f'(x_3) + \frac{1}{2}f''(\nu)(x_4-x_3)}{f'(x_2) + \frac{1}{2}f''(\mu)(x_4-x_2)} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)(x_1-x_2) - f''(\psi)(x_1-x_3)}{f'(x_3) + \frac{1}{2}f''(\psi)(x_1-x_3)}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\nu)(x_4-x_3) - f''(\mu)(x_4-x_2)}{f'(x_2) + \frac{1}{2}f''(\mu)(x_4-x_2)}\right).$$

Здесь $\xi \in [x_1, x_2]$, $\psi \in [x_1, x_3]$, $\nu \in [x_3, x_4]$, $\mu \in [x_2, x_4]$.

Заметим, что если в числителях этих дробей заменить $f''(\xi)$, $f''(\psi)$, $f''(\mu)$ и $f''(\nu)$ на $f''(x_1)$, это приведет к изменению числителя на величину порядка l^2. Действительно, $f''(\xi) - f''(x_1) = (\xi - x_1)f'''(\tau)$. Аналогичным образом, оба знаменателя можно заменить на $f'(x_2)$. Поэтому с точностью до членов порядка l^2

$$\frac{[f(x_1) : f(x_2) : f(x_3) : f(x_4)]}{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_1)(x_3-x_2)}{f'(x_2)}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f''(x_1)(x_2-x_3)}{f'(x_2)}\right).$$

А это выражение равно единице с точностью до членов порядка l^2. Лемма доказана.

□

5.3 Почему отображение f^{q_n} имеет ограниченную вторую производную

Докажем ограниченность отношения $\frac{(f^{q_n})''}{(f^{q_n})'}$. Так как значение $(f^{q_n})'$ ограничено (в силу второй леммы из доказательства теоремы Данжуа), из этого будет следовать ограниченность $(f^{q_n})''$.

Заметим, что функция $(f^{q_n})'$ — корректно определённое отображение из окружности в $\mathbb{R}$. Поэтому в некоторой точке x она достигает максимума, и $(f^{q_n})''(x) = 0$. Нам осталось доказать, что в разных точках окружности выражение $\frac{(f^{q_n})''}{(f^{q_n})'}$ отличается не слишком сильно. Преобразуем выражение $\frac{(f^{q_n})''}{(f^{q_n})'}$:

$$\frac{(f^{q_n})''(t)}{(f^{q_n})'(t)} = (\ln(f^{q_n})')'(t) = \sum_{i=0}^{q_n-1}(\ln f')'(t_i).$$

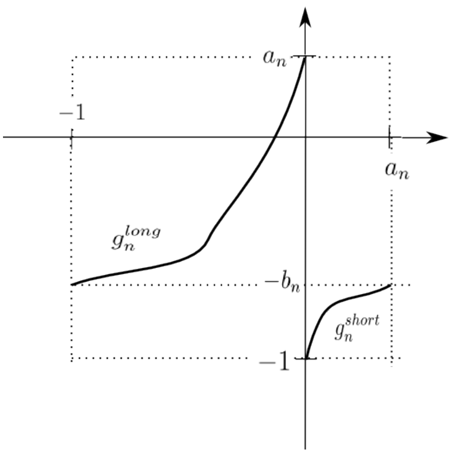
Разность $\frac{(f^{q_n})''(t)}{(f^{q_n})'(t)} - \frac{(f^{q_n})''(x)}{(f^{q_n})'(x)}$ можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{(f^{q_n})''(t)}{(f^{q_n})'(t)} - \frac{(f^{q_n})''(x)}{(f^{q_n})'(x)}\right| \leq \sum_{i=0}^{q_n-1}|(\ln f')'(x_i) - (\ln f')'(t_{k_i})| \leq Var_{[0,1]}(\ln f')'.$$

Здесь мы разбили точки орбит x_i и t_j на пары (x_i, t_{k_i}) таким образом, чтобы отрезки $[x_i, t_{k_i}]$ не пересекались. Это можно сделать по задаче 5 предыдущего листка.

Так как $(f^{q_n})''(x) = 0$, из последнего неравенства мы получаем оценку на $\frac{(f^{q_n})''(t)}{(f^{q_n})'(t)}$, что и требуется.

5.4 Преобразование в пространстве дробно-линейных отображений



Введём такие обозначения:

$$g_n^{long}(0) = a_n,\ g_n^{long}(-1) = -b_n,\ (g_n^{long})'(0) = M_n(a_n + b_n).$$

Тогда

$$g_n^{short}(0) = -1,\ g_n^{short}(a_n) = -b_n,$$
$$(g_n^{short})'|_{g_n^{long}(0)}(g_n^{long})'(0) = (g_n^{long})'|_{g_n^{short}(0)}(g_n^{short})'(0).$$

Последнее равенство следует из того, что отображения g^{long} и g^{short} коммутируют (так как степени f коммутируют).

Выпишем формулы для таких дробно-линейных отображений $\tilde{g}_n^{long}$ и $\tilde{g}_n^{short}$, которые тоже удовлетворяют всем этим шести равенствам.

$$\tilde{g}_n^{long} = \frac{a_n + (a_n + b_n M_n)z}{1 + (1 - M_n)z},$$

$$\tilde{g}_n^{short} = \frac{-a_n + (1 - b_n M_n)z}{a_n - (1 - M_n)z}.$$

Из утверждения, доказанного в пункте 5.1, следует, что эти дробно-линейные отображения будут близки к g_n^{long} и g_n^{short} (для g_n^{long} надо применить результат пункта 5.1 непосредственно, а для g_n^{short} нужна несложная дополнительная проверка из-за наличия нетривиального шестого условия).

Теперь посмотрим, какие дробно-линейные отображения $\tilde{g}_{n+1}^{long}$ и $\tilde{g}_{n+1}^{short}$ соответствуют g_{n+1}^{long} и g_{n+1}^{short}. По формуле (4),

$$g_{n+1}^{short}(x) = -\frac{1}{a_n} g_n^{long}(-a_n \cdot x),$$

поэтому

$$\begin{cases} -b_{n+1} = g_{n+1}^{short}(a_{n+1}) = \dfrac{-1 + a_{n+1}(a_n + b_n M_n)}{1 - (1 - M_n)a_n a_{n+1}}, \\ \dfrac{M_{n+1}(1 - b_{n+1})}{a_{n+1}} = (\tilde{g}_{n+1}^{short})'(0) \approx (g_{n+1}^{short})'(0) = (g_n^{long})'(0) = M_n(a_n + b_n) \end{cases} \tag{5}$$

Второе равенство выполнено с точностью до экспоненциально малой поправки. Мы не будем учитывать эту поправку, считая, что это равенство выполнено.

Подставляя b_{n+1} из первого равенства во второе, получаем после сокращения

$$M_{n+1} = (1 - a_n a_{n+1}(1 - M_n)),$$

или $(1 - M_{n+1}) = (1 - M_n)a_n a_{n+1}$.

Напомним, что $a_n = \frac{|[x, f^{q_{n+1}}(x)]|}{|[x, f^{q_n}(x)]|}$. Значит,

$$|1 - M_{n+1}| = a_{n+1} a_n^2 a_{n-1}^2 \dots a_1^2 a_0 |1 - M_0| = \frac{|[x, f^{q_{n+2}}(x)]| \cdot |[x, f^{q_{n+1}}(x)]|}{|[x, f^{q_1}(x)]| \cdot |[x, f(x)]|} |1 - M_0| \leq$$
$$\leq C|[x, f^{q_{n+2}}(x)]|.$$

По первой лемме из доказательства теоремы Данжуа, $|1 - M_n| < C\lambda^n$ для $\lambda < 1$.

Так как значение M_n экспоненциально близко к единице, отображения g^{long}, g^{short} экспоненциально близки к линейным отображениям $z \mapsto a_n + (a_n + b_n)z$ и $z \mapsto -1 + \frac{(1-b_n)}{a_n} z$.

Теперь надо повторить такое же рассуждение еще раз, рассмотрев преобразование в пространстве линейных отображений. Формулы (5) превращаются в формулы

$$
\begin{cases} -b_{n+1} = -1 + a_{n+1}(a_n + b_n), \\ \dfrac{(1-b_{n+1})}{a_{n+1}} = (a_n + b_n), \end{cases} \tag{6}
$$

откуда $(1 - a_{n+1} - b_{n+1}) = -a_{n+1}(1 - a_n - b_n)$. Значит, по аналогичным соображениям, $|1 - a_n - b_n| \leq C\lambda^n$, то есть $a_n + b_n$ экспоненциально быстро стремится к единице. Значит, g_n^{long} и g_n^{short} экспоненциально близки к сдвигам.

Это утверждение завершает доказательство теоремы.

6 Как обобщить это рассуждение на случай диофантовых чисел вращения

Я покажу, как можно улучшить сделанные оценки. Полного рассуждения рассказано не будет.

Во-первых, для диофантовых чисел $x \in D_{C,\delta}$ выполнено неравенство $k_n \leq q_n^\delta / C$.

Действительно, $|x - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{C}{q_n^{2+\delta}}$; но $k_n \leq \frac{|xq_n - p_n|}{|xq_{n-1} - p_{n-1}|}$, так как отрезок длины $|xq_n - p_n|$ составлен из k_n отрезков длины $|xq_{n-1} - p_{n-1}|$ и одного отрезка длины $|xq_{n+1} - p_{n+1}|$ (по построению k_n). Значит,

$$
k_n \leq \frac{|xq_n - p_n|}{|xq_{n-1} - p_{n-1}|} \leq \frac{\frac{1}{q_n}}{\frac{C}{q_{n-1}^{1+\delta}}} \leq \frac{q_n^\delta}{C}.
$$

Экспоненциальной оценки из леммы 3 нам теперь недостаточно. Но её можно улучшить. Для этого заметим, что с помощью леммы 3 можно усилить оценку на длины отрезков $[x, f^{q_n}(x)]$ (см. доказательство теоремы Данжуа). Более того, в этой оценке можно дополнительно учесть значение k_n, если оно велико. После чего надо повторить все выкладки из леммы 3, используя усиленную оценку на длину отрезков $[x, f^{q_n}(x)]$.

В статье К. М. Ханина и Я. Г. Синая содержится более подробное изложение этих оценок.