Курс «Числа вращения и модули эллиптических кривых»

Наталия Гончарук, natalka@mccme.ru

20 сентября 2011 г.

Теорема Данжуа и пример Данжуа

Обозначения. $\rho = \rho(f)$ — число вращения диффеоморфизма f.
R_ρ — поворот окружности на угол ρ.
$\frac{p_n}{q_n}$ — n-я подходящая дробь числа ρ.
$x_k := f^k(x), t_k := f^k(t)$ — орбиты точек x, t.

1. Докажите, что орбита иррационального поворота всюду плотна.

2. Пусть $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Докажите, что на окружности можно выбрать счётное число отрезков таким образом, что если отождествить все точки каждого отрезка, то отображение f превратится в новое отображение окружности $\tilde{f}$, непрерывно сопряженное повороту.

3. Докажите, что отображение f из примера Данжуа можно сделать: а) гладким; б) непрерывно дифференцируемым.

4. а) Докажите, что точки $x_0, x_1 \dots x_{q_n+q_{n-1}-1}$ разбивают окружность на отрезки двух типов: $[x_k, x_{k+q_n}]$ и $[x_k, x_{k+q_{n-1}}]$.

   б) Докажите, что точки $x_0, x_1 \dots x_{q_n-1}$ разбивают окружность на отрезки двух типов: $[x_k, x_{k+q_n-q_{n-1}}]$ и $[x_k, x_{k+q_{n-1}}]$.

5. Докажите, что точки $x_0\, x_1, \dots x_{q_n-1}$ и t_0, $t_1, \dots\, t_{q_n-1}$ можно разбить на пары (x_k, t_{i_k}) так, чтобы отрезки $[x_k, t_{i_k}]$ не перекрывались.

В следующих задачах содержится еще одно доказательство теоремы Данжуа для $f \in C^2$ — с помощью техники искажений.

6. Докажите лемму об искажениях. Как выглядит её формулировка, если f_i — одно и то же отображение окружности f?

7. Докажите, что образы отрезка $[a, f^{-q_n}(a)]$ под действием отображений $id, f, f^2, \dots f^{q_n}$ не пересекаются. Получите оценку $d(f^{q_n}|_{[a, f^{-q_n}(a)]}) < C$.

8. Пусть существуют отрезки, в которые не попадает орбита точки x. Рассмотрим такой (максимальный по включению) отрезок $[a,b]$.

   а) Докажите, что образы отрезка $[a,b]$ не пересекаются. Получите оценку $d(f^{q_n}|_{[a,b]}) < D$.

   б) Докажите, что орбита точки a подходит сколь угодно близко к точке a слева, но никогда не попадает в отрезок $[a,b]$, то есть не подходит к a справа. В частности, для некоторого q_n точки a и $f^{-q_n}(a)$ находятся на расстоянии менее $\frac{|[a,b]|^2}{2CD}$, а точки a и $f^{q_n}(a)$ находятся по разные стороны отрезка $[a,b]$.

9. В условиях задачи 8 докажите, что $(f^{q_n})'(a) > \frac{2D}{|[a,b]|}$, глядя на отрезок $[a, f^{-q_n}(a)]$.

10. В условиях задачи 8 докажите, что длина отрезка $f^{q_n}([a,b])$ больше 2 (что невозможно).

Из последней задачи мы получаем противоречие с предположением задачи 8. Тем самым, теорема Данжуа доказана.

Краткий конспект лекции

Лекция посвящена доказательству теоремы Данжуа:

Теорема 1 (Данжуа). *Пусть f — диффеоморфизм окружности, $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, причём $\ln f'$ имеет ограниченную вариацию. Тогда диффеоморфизм f непрерывно сопряжён повороту на угол $\rho(f)$.*

и построению примера Данжуа — примера C^1-гладкого отображения окружности, которое *не* непрерывно сопряжено повороту.

Попробуем построить сопряжение

Попробуем построить сопряжение h между поворотом R_ρ и отображением f: $h \circ R_\rho = f \circ h$. Пусть $h(0) = x$. Тогда

$$h(\{n\rho\}) = h(R_\rho^n(0)) = f^n(h(0)) = f^n(x).$$

То есть мы знаем ограничение отображения h на всюду плотное (по задаче 1) множестве точек $\{n\rho\}$.

Если бы ограничение $h|_{\{n\rho\}}$ было непрерывным, мы могли бы продолжить h по непрерывности во все точки отрезка $[0,1]$. Равенство $h(R_\rho(y)) = f(h(y))$ можно было бы получить переходом к пределу по последовательности $s_k \in \{n\rho\}$, $s_k \to y$.

По задаче №11 предыдущего листка, точки орбиты f упорядочены на окружности так же, как и точки орбиты поворота R_ρ. Отсюда следует, что ограничение $h|_{\{n\rho\}}$ монотонно. Поэтому оно может иметь разрывы только первого рода:

$$a_k = \lim_{\substack{t_k \to x-0 \\ t_k \in \{n\rho\}}} h(t_k) \quad \neq \quad b_k = \lim_{\substack{w_k \to x-0 \\ w_k \in \{n\rho\}}} h(w_k).$$

Для отображения f наличие таких разрывов означает, что точки $h(n\rho) = f^n(x)$ не попадают в отрезки $[a_k, b_k]$, то есть *орбита отображения f не плотна.*

Итак, непрерывное сопряжение существует тогда и только тогда, когда орбиты отображения f плотны.

Пример Данжуа

Возьмём иррациональный поворот окружности R_ρ. Рассмотрим его орбиту $x, f^{\pm 1}(x), f^{\pm 2}(x), \ldots$ Вместо точки $f^n(x)$ для любого n вклеим в нашу окружность отрезок $[a_n, b_n]$. Длины отрезков выберем такими, чтобы их суммарная длина была равна 1.

В итоге мы получим окружность длины 2 и счетное число отрезков $[a_n, b_n]$ на этой окружности. Вне отрезков $[a_n, b_n]$ отображение уже определено; на отрезках определим его таким образом, чтобы $f([a_n, b_n]) = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Это можно сделать так, чтобы отображение f было непрерывно дифференцируемым (см. задачу 3).

Теорема Данжуа: первое доказательство

Теорему Данжуа мы получим как следствие леммы:

Лемма 1. *Длины дуг $[x_0, x_{q_n}]$ убывают как геометрическая прогрессия:*

$$|[x_0, x_{q_n}]| < C\lambda^n,$$

где $\lambda < 1$ и C — константы, зависящие только от отображения f (не зависящие от n и точки x).

Выведем теорему Данжуа из этой леммы. По задаче 4 а), точки x_0, x_1, …, $x_{q_n+q_{n-1}-1}$ разбивают окружность на отрезки вида $[x_l, f^{q_n}(x_l)]$ и $[x_l, f^{q_{n-1}}(x_l)]$. По лемме 1, длины этих отрезков убывают. Значит, для больших n отрезки получаются сколь угодно малой длины, то есть орбита точки x плотна.

Для доказательства леммы 1 мы используем такую оценку:

Лемма 2. *Производные $(f^{q_n})'(x)$ ограничены:*

$$\frac{1}{C} < (f^{q_n})'(x) < C$$

для некоторой константы C, зависящей только от f (не зависящей от x и n).

Выведем из леммы 2 лемму 1. Для этого вспомним, что $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$, поэтому отрезок $[x_0, x_{q_{n+1}}]$ — это отрезок $[x_0, x_{q_{n-1}}]$, от которого отрезаны отрезки

$$I_1 = [x_{q_{n-1}}, x_{q_{n-1}+q_n}],\ I_2 = [x_{q_{n-1}+q_n}, x_{q_{n-1}+2q_n}], \dots I_{k_{n+1}} = [x_{q_{n-1}+(k_{n+1}-1)q_n}, x_{q_{n-1}+k_{n+1}q_n}].$$

Остающийся отрезок $[x_{q_{n-1}+k_{n+1}q_n}, x_0]$ содержится в отрезке $f^{q_n}(I_{k_{n+1}})$, поэтому по лемме 2 он короче, чем $C|I_{k_{n+1}}|$.

Значит, от отрезка $[x_0, x_{q_{n-1}}]$ мы отрезали кусок $I_1 \cup \dots \cup I_{k_{n+1}}$, который хотя бы в $\frac{1}{C}$ раз длиннее, чем тот кусок, который остался. Поэтому оставшийся кусок $[x_0, x_{q_{n+1}}] = [x_0, x_{q_{n-1}+k_{n+1}q_n}]$ — не более чем $\frac{1}{1+\frac{1}{C}}$ доля отрезка $[x_0, x_{q_{n-1}}]$. По индукции получаем требуемую оценку с $\lambda = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{C}}}$.

Доказательство леммы 2

Первое соображение. Заметим, что среднее значение $(f^{q_n})'$ равно единице. Поэтому найдется точка x, для которой $(f^{q_n})'(x) = 1$. Осталось доказать, что для разных точек окружности значения $(f^{q_n})'$ отличаются не слишком сильно.

Второе соображение. Воспользуемся формулой производной сложной функции: $(f^{q_n})'(t) = f'(t_0)f'(t_1)\dots f'(t_{q_n-1})$. Прологарифмируем это выражение:

$$\ln(f^{q_n})'(t) = \sum_{i=0}^{q_n-1} \ln f'(t_i).$$

Надо доказать, что для точек t и x такие выражения отличаются мало. Мы воспользуемся задачей 5 и ограниченностью вариации $\ln f'$:

$$\left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \ln f'(t_i) - \sum_{i=0}^{q_n-1} \ln f'(x_i)\right| \le \sum_{k=0}^{q_n-1} |\ln f'(x_k) - \ln f'(t_{i_k})| \le Var_{[0,1]} \ln f',$$

последнее неравенство следует из определения вариации.

Итак, мы доказали лемму 2. Тем самым, доказали и теорему Данжуа.

Теорема Данжуа: второе доказательство в задачах

В задачах 6 — 10 содержится доказательство теоремы Данжуа для $f \in C^2$ с помощью техники искажений.

Искажением диффеоморфизма f называется величина

$$d(f) = max \ln \left|\frac{f'(x)}{f'(y)}\right|.$$

Искажение мало, когда f «почти линейно»; для линейного отображения искажение равно нулю.

Лемма 3 (Лемма об искажениях)**.** *Пусть диффеоморфизмы отрезков* $f_1\colon I_1 \to I_2$, $f_2\colon I_2 \to I_3, \dots, f_n\colon I_n \to I_{n+1}$ *дважды дифференцируемы, и* $\frac{f_i''}{f_i'} = (\ln f_i')' \le C$ *для любого* i*. Тогда* $d(f_n \circ \dots \circ f_1) \le C(|I_1| + \dots |I_n|)$.