Задачи к лекции 9

1) Докажите, что множество $X = \{\omega \in \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}\ (\omega_n \to \omega_{n+1}) \in \Gamma\}$ замкнуто в $\{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}}$.

2) Марковская мера является аддитивной вероятностной мерой.

3) Если топологическая марковская цепь, соответствующая матрице $\Pi = (\pi_{ij})$ является топологически перемешивающей, то марковская цепь (Π, p^*) будет (метрически) перемешивающей.

4) Рассмотрим ТМЦ, соответствующую графу Γ, причём Γ связен. Фиксируем вершину a и положим $M_0 = \{a\}$, $M_{n+1} = \{v \mid (u \to v) \in \Gamma, u \in M_n\}$. Докажите, что последовательность (M_n) будет предпериодической и если $(M_k, M_{k+1}, \ldots, M_{k+L-1})$ — её период, то эти множества образуют разбиение множества всех вершин графа Γ.
(Указание. Докажите, что если $a \in M_i$ и $a \in M_j$, то для всех $k > k_0$ $a \in M_{k\cdot \text{НОД}(i,j)}$.)

5) Если ТМЦ, соответствующая матрице Π — топологически транзитивна, то метрическая марковская цепь, соответствующая (Π, p^*), будет эргодична.

6) Покажите, что марковская цепь, соответствующая $p = (0, 1/2, 1/2)$ и $\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не является эргодичной, указав инвариантное множество меры, не равной 0 и 1.

7) Пусть дана матрица Π ($\pi_{ij} > 0$, $\sum_j \pi_{ij} = 1$), Γ — соответствующий её граф. Пусть множество вершин $V = \{1, \ldots, N\}$ графа Γ, разбито на множества V_1 и V_2, причём (1) нет рёбер, ведущих из V_2 в V_1; (2) из любой вершины V_1 есть путь в некоторую вершину V_2. Обозначим $|p|_U = \sum_{i \in U} p_i$.

   а) Докажите, что существуют такое $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, что для любого начального вектора $p \in \Delta$, $|p\Pi^n|_{V_1} \le |p|_{V_1}(1 - \varepsilon)$.

   б) Докажите, что для любого такого вектора $p^* \in \Delta$, что $p^*\Pi = p^*$, будет $|p^*|_{V_1} = 0$.

   в) Докажите, что существует такое разбиение $V = \hat{V}_1 \sqcup \hat{V}_2$, удовлетворяющее условиям (1) и (2), что для любого другого разбиения $V_1 \sqcup V_2$, удовлетворяющего им, $V_2 \supset \hat{V}_2$.

   г) Докажите, что в графе $\hat{\Gamma}$, полученном ограничением Γ на множество вершин $\hat{V}_2$, путь из вершины u в вершину v существует тогда и только тогда, когда существует путь из v в u.

Задачи к лекции 9

1) Докажите, что множество $X = \{\omega \in \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}\ (\omega_n \to \omega_{n+1}) \in \Gamma\}$ замкнуто в $\{1, \ldots, N\}^{\mathbb{Z}}$.

2) Марковская мера является аддитивной вероятностной мерой.

3) Если топологическая марковская цепь, соответствующая матрице $\Pi = (\pi_{ij})$ является топологически перемешивающей, то марковская цепь (Π, p^*) будет (метрически) перемешивающей.

4) Рассмотрим ТМЦ, соответствующую графу Γ, причём Γ связен. Фиксируем вершину a и положим $M_0 = \{a\}$, $M_{n+1} = \{v \mid (u \to v) \in \Gamma, u \in M_n\}$. Докажите, что последовательность (M_n) будет предпериодической и если $(M_k, M_{k+1}, \ldots, M_{k+L-1})$ — её период, то эти множества образуют разбиение множества всех вершин графа Γ.
(Указание. Докажите, что если $a \in M_i$ и $a \in M_j$, то для всех $k > k_0$ $a \in M_{k\cdot \text{НОД}(i,j)}$.)

5) Если ТМЦ, соответствующая матрице Π — топологически транзитивна, то метрическая марковская цепь, соответствующая (Π, p^*), будет эргодична.

6) Покажите, что марковская цепь, соответствующая $p = (0, 1/2, 1/2)$ и $\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не является эргодичной, указав инвариантное множество меры, не равной 0 и 1.

7) Пусть дана матрица Π ($\pi_{ij} > 0$, $\sum_j \pi_{ij} = 1$), Γ — соответствующий её граф. Пусть множество вершин $V = \{1, \ldots, N\}$ графа Γ, разбито на множества V_1 и V_2, причём (1) нет рёбер, ведущих из V_2 в V_1; (2) из любой вершины V_1 есть путь в некоторую вершину V_2. Обозначим $|p|_U = \sum_{i \in U} p_i$.

   а) Докажите, что существуют такое $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, что для любого начального вектора $p \in \Delta$, $|p\Pi^n|_{V_1} \le |p|_{V_1}(1 - \varepsilon)$.

   б) Докажите, что для любого такого вектора $p^* \in \Delta$, что $p^*\Pi = p^*$, будет $|p^*|_{V_1} = 0$.

   в) Докажите, что существует такое разбиение $V = \hat{V}_1 \sqcup \hat{V}_2$, удовлетворяющее условиям (1) и (2), что для любого другого разбиения $V_1 \sqcup V_2$, удовлетворяющего им, $V_2 \supset \hat{V}_2$.

   г) Докажите, что в графе $\hat{\Gamma}$, полученном ограничением Γ на множество вершин $\hat{V}_2$, путь из вершины u в вершину v существует тогда и только тогда, когда существует путь из v в u.