Задачи к лекции 7

1) Пусть $a = (a_1, \dots a_n)$ таково, что числа $a_1, \dots, a_n, 1$ рационально независимы. Докажите, что для каждого $k \in \mathbb{Z}^n$ временные средние $\tilde{S}_n(\psi_k)(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \psi_k(T^j(x))$ функции $\psi_k(x) = e^{2\pi i(k,x)}$ под действием отображения сдвига $T(x) = x + a \pmod 1$ равномерно по x сходятся к константе (какой?).
2) Приведите для отображения из предыдущей задачи пример множества I, для которого не существует $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n(\chi_I)(0)$.
3) Докажите, что отображение $\hat{T}\colon (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + x)$ двумерного тора эргодично относительно меры Лебега, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
4) Пусть $R_\varphi\colon (x, y) \mapsto (x, y + \varphi)$. Докажите, что все меры μ, инвариантные относительно всех R_φ сразу — это $\mu_1 \otimes \lambda$, т. е. такие меры, что $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\lambda(B)$, где μ^1 — некоторая мера, а λ — мера Лебега на окружности.
5) Пусть μ — мера, инвариантная относительно $\hat{T}$. Тогда меры $\mu_\beta(A) = \mu(R_\beta A)$ и $\mu_E(A) = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \mu_\beta(A)\, d\beta$ также инвариантны относительно $\hat{T}$.
6) Докажите, что:
   а) μ_{S^1} инвариантна относительно всех R_β;
   б) μ_{S^1} является мерой Лебега на торе.
7) Докажите, что если $\mu \neq \mu_{S^1}$, то существует разбиение $S^1 = E \sqcup F$ с $\lambda(E), \lambda(F) > 0$, такое что $\mu_E \neq \mu_F$, а тогда мера μ_{S^1} не является эргодичной относительно $\hat{T}$.
8) Докажите, что отображение $\hat{T}$ строго эргодично.
9) Докажите, что последовательность $\{\alpha k^2 + \beta k + \gamma | k \in \mathbb{Z}\}$ равномерно распределена на S^1, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
10) Докажите, что последовательность $\{\alpha_n k^n + \dots + \alpha_2 k^2 + \alpha_1 k + \alpha_0 | k \in \mathbb{Z}\}$ равномерно распределена на S^1, если $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$.

Задачи к лекции 7

1) Пусть $a = (a_1, \dots a_n)$ таково, что числа $a_1, \dots, a_n, 1$ рационально независимы. Докажите, что для каждого $k \in \mathbb{Z}^n$ временные средние $\tilde{S}_n(\psi_k)(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \psi_k(T^j(x))$ функции $\psi_k(x) = e^{2\pi i(k,x)}$ под действием отображения сдвига $T(x) = x + a \pmod 1$ равномерно по x сходятся к константе (какой?).
2) Приведите для отображения из предыдущей задачи пример множества I, для которого не существует $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n(\chi_I)(0)$.
3) Докажите, что отображение $\hat{T}\colon (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + x)$ двумерного тора эргодично относительно меры Лебега, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
4) Пусть $R_\varphi\colon (x, y) \mapsto (x, y + \varphi)$. Докажите, что все меры μ, инвариантные относительно всех R_φ сразу — это $\mu_1 \otimes \lambda$, т. е. такие меры, что $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\lambda(B)$, где μ^1 — некоторая мера, а λ — мера Лебега на окружности.
5) Пусть μ — мера, инвариантная относительно $\hat{T}$. Тогда меры $\mu_\beta(A) = \mu(R_\beta A)$ и $\mu_E(A) = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E \mu_\beta(A)\, d\beta$ также инвариантны относительно $\hat{T}$.
6) Докажите, что:
   а) μ_{S^1} инвариантна относительно всех R_β;
   б) μ_{S^1} является мерой Лебега на торе.
7) Докажите, что если $\mu \neq \mu_{S^1}$, то существует разбиение $S^1 = E \sqcup F$ с $\lambda(E), \lambda(F) > 0$, такое что $\mu_E \neq \mu_F$, а тогда мера μ_{S^1} не является эргодичной относительно $\hat{T}$.
8) Докажите, что отображение $\hat{T}$ строго эргодично.
9) Докажите, что последовательность $\{\alpha k^2 + \beta k + \gamma | k \in \mathbb{Z}\}$ равномерно распределена на S^1, если $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
10) Докажите, что последовательность $\{\alpha_n k^n + \dots + \alpha_2 k^2 + \alpha_1 k + \alpha_0 | k \in \mathbb{Z}\}$ равномерно распределена на S^1, если $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$.