Задачи к лекции 4

1) Какие периодические точки (и какого периода) имеет отображение поворота окружности $R_\alpha\colon x \mapsto x + \alpha \pmod 1$?

2) Отображение $f\colon X \to X$ минимально тогда и только тогда, когда оно не имеет инвариантных замкнутых множеств, отличных от $\varnothing$ и X.

3) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$, причём лишь конечное число из a_n отлично от нуля. Докажите, что коэффициенты ряда Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ функции f, вычисляемые по формуле $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, равны a_n.

4) Напишите формулу, аналогичную приведённой в предыдущей задаче, для коэффициентов ряда Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}$ функций с периодом 1.

5) Пусть функция f имеет период 1 и c_n — её коэффициенты Фурье. Вычислите с помощью интегральной формулы предыдущей задачи коэффициенты Фурье функций $f(x+\alpha)$ и $f(kx)$ (k — целое).

6) Докажите, что если $\mu(T^{-n}A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ для любых множеств A и B, принадлежащих полукольцу, то это же имеет место для любых множеств из σ-алгебры измеримых множеств.

7) Покажите, что отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ не имеет вероятностной инвариантной борелевской меры.

Задачи к лекции 4

1) Какие периодические точки (и какого периода) имеет отображение поворота окружности $R_\alpha\colon x \mapsto x + \alpha \pmod 1$?

2) Отображение $f\colon X \to X$ минимально тогда и только тогда, когда оно не имеет инвариантных замкнутых множеств, отличных от $\varnothing$ и X.

3) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$, причём лишь конечное число из a_n отлично от нуля. Докажите, что коэффициенты ряда Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ функции f, вычисляемые по формуле $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, равны a_n.

4) Напишите формулу, аналогичную приведённой в предыдущей задаче, для коэффициентов ряда Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi inx}$ функций с периодом 1.

5) Пусть функция f имеет период 1 и c_n — её коэффициенты Фурье. Вычислите с помощью интегральной формулы предыдущей задачи коэффициенты Фурье функций $f(x+\alpha)$ и $f(kx)$ (k — целое).

6) Докажите, что если $\mu(T^{-n}A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ для любых множеств A и B, принадлежащих полукольцу, то это же имеет место для любых множеств из σ-алгебры измеримых множеств.

7) Покажите, что отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ не имеет вероятностной инвариантной борелевской меры.