## Задачи к лекции 3

1) $\mathcal{S}$ — полукольцо. Докажите, что $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{\bigsqcup_{j=1}^{N} A_j \mid A_j \in \mathcal{S}\right\}$ — кольцо.
2) Цилиндрические множества образуют полукольцо в $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (или $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$).
3) Множество $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ является компактом в метрике $\rho(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}|\alpha_j - \beta_j|$, т. е. из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.
4) Докажите, что если $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, то $\mu^*(M) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k)$.
5) Докажите, что следующие определения непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ метрических пространств эквивалентны:
   а) Для любой сходящейся последовательности $(x_n)$, $x_n \to x_0$ последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.
   б) Прообраз $f^{-1}(G)$ любого открытого множества $G \subset Y$ открыт.
6) Докажите, что для измеримости (т. е. $(\mathcal{M},\mathcal{B})$-измеримости) функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ достаточно, чтобы $f^{-1}((-\infty,c)) \in \mathcal{M}$ при всех $c$. (Указание: те $A \subset \mathbb{R}$, для которых $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, образуют $\sigma$-алгебру.)
7) Докажите, что отображение $E_2$ удвоения окружности сохраняет меру Лебега. (Указание: $\mu(A)$ и $\mu((E_2)^{-1}(A))$ — две меры, совпадающие на полукольце интервалов.)
8) Укажите другую меру, инвариантную относительно $E_2$.
9) «Стандартное» канторово множество имеет лебегову меру нуль.
10) Вычислите интеграл от функции Дирихле по отрезку $[0,1]$.
11) Пусть $T$ эргодично. Докажите, что если для измеримого множества $A$ выполнено $\mu(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$, то $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$.
12) Если $T$ перемешивает, то оно эргодично (относительно той же меры).


## Задачи к лекции 3

1) $\mathcal{S}$ — полукольцо. Докажите, что $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \left\{\bigsqcup_{j=1}^{N} A_j \mid A_j \in \mathcal{S}\right\}$ — кольцо.
2) Цилиндрические множества образуют полукольцо в $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (или $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$).
3) Множество $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ является компактом в метрике $\rho(\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}|\alpha_j - \beta_j|$, т. е. из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.
4) Докажите, что если $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, то $\mu^*(M) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k)$.
5) Докажите, что следующие определения непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ метрических пространств эквивалентны:
   а) Для любой сходящейся последовательности $(x_n)$, $x_n \to x_0$ последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.
   б) Прообраз $f^{-1}(G)$ любого открытого множества $G \subset Y$ открыт.
6) Докажите, что для измеримости (т. е. $(\mathcal{M},\mathcal{B})$-измеримости) функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ достаточно, чтобы $f^{-1}((-\infty,c)) \in \mathcal{M}$ при всех $c$. (Указание: те $A \subset \mathbb{R}$, для которых $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, образуют $\sigma$-алгебру.)
7) Докажите, что отображение $E_2$ удвоения окружности сохраняет меру Лебега. (Указание: $\mu(A)$ и $\mu((E_2)^{-1}(A))$ — две меры, совпадающие на полукольце интервалов.)
8) Укажите другую меру, инвариантную относительно $E_2$.
9) «Стандартное» канторово множество имеет лебегову меру нуль.
10) Вычислите интеграл от функции Дирихле по отрезку $[0,1]$.
11) Пусть $T$ эргодично. Докажите, что если для измеримого множества $A$ выполнено $\mu(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$, то $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$.
12) Если $T$ перемешивает, то оно эргодично (относительно той же меры).