Задачи к лекции 2

1) Приведите пример не первообразного корня степени $2^k - 1$ из единицы, который имеет степень ровно k под действием отображения $z \mapsto z^2$.

2) Докажите, что если X — «хорошее» метрическое (или топологическое) пространство (установите, что означает «хорошее» здесь), то $f\colon X \to X$ топологически транзитивно тогда и только тогда, когда для любых открытых непустых $U, V \subset X$ существует такое N, что $f^N(U) \cap V \neq \varnothing$.

3) Какие числа на отрезке $[0,1]$ имеют более одной двоичной записи?

4) Постройте точку x, орбита которой под действием отображения E_2 всюду плотна.

5) а) Докажите, что отображение $f_4(x) = 4x(1-x)$ отрезка $[0,1]$ топологически сопряжено с $T(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1/2, \\ 2-2x, & x \geq 1/2. \end{cases}$

   б) Докажите, что f_4 топологически транзитивно.

6) Если G — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, принимающая только целые значения, то $G = \mathrm{const}$.

7) Если отображение $f\colon S^1 \to S^1$ имеет степень k, то каждая точка имеет не менее $|k|$ прообразов.

8) Если $f \in C^1(S^1)$ — растягивающее отображение S^1, то существует такое $\lambda > 1$, что $(f^n)'(x) \geq \lambda^n$.

9) Докажите, что если отображения $f, g\colon S^1 \to S^1$ достаточно близки, то их степени совпадают.

10) Докажите, что степень любого растягивающего отображения окружности по модулю больше 1.

11) Решите уравнение:

   а) $E_k(x) = 0$;

   б) $(E_k)^n(x) = 0$.

   Всюду ниже будем считать, что f — растягивающее отображение окружности степени $k > 1$.

12) а) Докажите, что всякое поднятие $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отображения f имеет неподвижную точку p.

   б) Чему равно $F(p+1)$? Сколько решений имеет уравнение $f(x) = p$?

   в) Сколько решений имеет уравнение $f^n(x) = p$?

   г) Докажите, что расстояние между любыми двумя соседними решениями предыдущего уравнения стремится к нулю при $n \to \infty$.

13) а) Пусть существует такой гомеоморфизм окружности $h\colon S^1 \to S^1$, который сопрягает f и E_k, т. е. $E_k \circ h = h \circ f$, и $h^{-1}(0) = p$. Докажите, что p — неподвижная точка отображения f.

   б) Куда при отображении h переходят решения уравнения $f^n(x) = p$?

14) Докажите, что всякое растягивающее отображение окружности топологически сопряжено с отображением E_k (т.е. что гомеоморфизм h из предыдущей задачи существует).