Задачи к лекции 1

1. При каких значениях параметра λ формула $f(x) = \lambda x(1-x)$ задаёт отображение отрезка $[0;1]$ в себя?

2. Докажите, что траектория любой точки под действием гомеоморфизма прямой сходится либо к периодической точке, либо к бесконечности. Какие могут быть периоды у периодических точек в этом случае?

3. Пусть $f(x) = x + b \pmod 1$ — поворот окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол b. Тогда если

   (a) $b \in \mathbb{Q}$, то все точки периодичны,

   (b) $b \notin \mathbb{Q}$, то нет периодических точек.

4. Докажите, что линейное преобразование $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ действует взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

5. Докажите, что линейный автоморфизм $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ тора $\mathbb{T}^2$ *гиперболичен*, т. е. сжимает вдоль одного направления и растягивает вдоль другого. В этом случае угол наклона (растягивающего направления) иррационален.

Задачи к лекции 1

1. При каких значениях параметра λ формула $f(x) = \lambda x(1-x)$ задаёт отображение отрезка $[0;1]$ в себя?

2. Докажите, что траектория любой точки под действием гомеоморфизма прямой сходится либо к периодической точке, либо к бесконечности. Какие могут быть периоды у периодических точек в этом случае?

3. Пусть $f(x) = x + b \pmod 1$ — поворот окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол b. Тогда если

   (a) $b \in \mathbb{Q}$, то все точки периодичны,

   (b) $b \notin \mathbb{Q}$, то нет периодических точек.

4. Докажите, что линейное преобразование $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ действует взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

5. Докажите, что линейный автоморфизм $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ тора $\mathbb{T}^2$ *гиперболичен*, т. е. сжимает вдоль одного направления и растягивает вдоль другого. В этом случае угол наклона (растягивающего направления) иррационален.